Lagrange–Inversion

Josef Hofbauer

Institut für Mathematik der Universität Wien,
Strudlhofgasse 4, A-1090 Wien, Austria.

1. Die Lagrangesche Inversionsformel. Die Lagrangesche Inversionsformel läßt sich beispielsweise in der folgenden Art formulieren:
Sei $g(x) = \frac{x}{\varphi(x)}$ eine (formale) Potenzreihe (f.P.R.) in x mit $\varphi(0) \neq 0$ und $f(x)$ eine f.P.R., die man nach den Potenzen von $g(x)$ entwickelt:

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, g(x)^k = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{x^k}{\varphi(x)^k}. \tag{1.1}$$

Dann sind die Koeffizienten c_k durch folgende Formeln gegeben:
1. Version der Lagrangeschen Formel:

$$c_n = \frac{1}{n} f'(x) g(x)^{-n}\big|_{x^{-1}} = \frac{1}{n} f'(x)\varphi(x)^n\big|_{x^{n-1}}. \tag{I}$$

2. Version der Lagrangeschen Formel:

$$c_n = f(x) g'(x) g(x)^{-n-1}\big|_{x^{-1}} = f(x) g'(x) \varphi(x)^{n+1}\big|_{x^n}. \tag{II}$$

Dabei bedeutet $h(x)|_{x^n}$ den Koeffizienten von x^n in der formalen Potenz- oder Laurentreihe $h(x)$. Für $h(x)|_{x^{-1}}$ werden wir manchmal auch $\operatorname{Res} h(x)$ und später $M(h(x)dx)$ schreiben.

Wählt man in (1.1) $f(x) = x$, so erhält man die Koeffizienten der zu $g(x)$ (bezüglich Komposition) inversen Potenzreihe.

Einer der einfachsten Beweise der Lagrangeschen Inversionsformel ist der folgende: Wir zeigen zunächst

Lemma 1. *Ist $g(x)$ wie oben eine f.P.R. der Ordnung 1 (wie üblich ist die Ordnung einer formalen Potenzreihe $g(x)$ definitionsgemäß der kleinste Index s, sodaß der Koeffizient von x^s in $g(x)$ nicht verschwindet), dann gilt für beliebige ganze Zahlen n*

$$\frac{g'(x)}{g^{n+1}(x)}\Big|_{x^{-1}} = \delta_{n0}. \tag{1.2}$$

Beweis. Ist nämlich $n \neq 0$, dann ist $g(x)g(x)^{-n+1} = -\frac{1}{n}(g(x)^{-n})'$ und hat daher als Ableitung einer formalen Laurentreihe das Residuum 0. Für $n = 0$ ist

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1}{x} - \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)},$$

und da der zweite Summand wegen $\varphi(0) \neq 0$ eine f.P.R. ist, ist das Residuum $= 1$.

Um jetzt die 1. Version zu beweisen, leiten wir die Entwicklung (1.1) ab:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot k \cdot g(x)^{k-1} g'(x),$$

dividieren durch $g(x)^n$ und nehmen das Residuum:

$$\operatorname{Res} f'(x)g(x)^{-n} = \operatorname{Res} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot k \cdot g'(x)g(x)^{-n+k-1} = nc_n$$

wegen Lemma 1.

Für die 2. Version multiplizieren wir (1.1) bloß mit $g'(x)g(x)^{-n-1}$, bestimmen das Residuum und wenden wieder Lemma 1 an:

$$\operatorname{Res} f(x)g'(x)g(x)^{-n-1} = \operatorname{Res} \sum_{k=1}^{\infty} c_k g'(x)g(x)^{-n+k-1} = c_n.$$

Damit sind (I) und (II) gezeigt.

Beispiele.

(1) Die zu $g(x) = xe^{-ax}$ inverse Reihe ist

$$G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(an)^{n-1}}{n!} z^n, \tag{1.3}$$

weil man aus (I) für $f(x) = x$ und $\varphi(x) = e^{ax}$

$$c_n = \frac{1}{n} e^{ax}\Big|_{x^{n-1}} = \frac{(an)^{n-1}}{n!}$$

erhält.

(2) Es gelten die Entwicklungen

$$e^{xz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x(x+ak)^{k-1}}{k!} (ze^{-az})^k \tag{1.4}$$

und

$$\frac{e^{xz}}{1-az} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+ak)^k}{k!} (ze^{-az})^k. \tag{1.5}$$

Multipliziert man (1.4) mit e^{yz} und vergleicht die Koeffizienten von z^n, erhält man *Abels Identität*:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x(x+ak)^{k-1}(y-ak)^{n-k}. \tag{1.6}$$

(3) Es gilt

$$(1+z)^a = \sum_{k=0}^{\infty} G_k(a,b)(z(1+z)^b)^k$$

mit

$$G_n(a,b) = \frac{1}{n} a(1+z)^{a-1}(1+z)^{-nb}\big|_{z^{n-1}} = \frac{a}{n}\binom{a-1-nb}{n-1} = \frac{a}{a-bn}\binom{a-bn}{n}$$

Aus $(1+z)^{a+c} = (1+z)^a(1+z)^c$ folgt dann

$$G_n(a+c,b) = \sum_{k=0}^{n} G_k(a,b)G_{n-k}(c,b). \tag{1.7}$$

2. Anwendungen in der Kombinatorik. Eine der schönsten Anwendungen der Lagrangeschen Formel auf ein kombinatorisches Problem ist die Herleitung von Cayleys Formel für die Anzahl der Wurzelbäume. Ein *Wurzelbaum* ist ein Baum, dessen Knoten durchnumeriert sind, wobei ein Knoten — die Wurzel — ausgezeichnet ist.

Sei b_n die Anzahl der Wurzelbäume über der Knotenmenge $\{1,2,\dots,n\}$ und

$$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n!} t^n.$$

Bezeichnen wir außerdem mit w_n die Anzahl der *Wurzelwälder* (= Graphen, deren Komponenten Wurzelbäume sind) über $\{1,2,\dots,n\}$. Aus der Exponentialformel folgt dann

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n!} t^n = e^{s(t)}.$$

Nun gilt aber $(n+1)w_n = s_{n+1}$: Denn aus jedem Wurzelbaum mit $n+1$ Knoten entsteht durch Weglassen der Wurzel ein Wurzelwalds mit n Knoten. Korrigiert man jetzt noch die Numerierung, indem man dem $(n+1)$-ten Knoten die Nummer der weggelassenen Wurzel gibt, so wird aus der $1:1$ Abbildung eine $(n+1):1$-Abbildung. Daher ist $s(t) = te^{s(t)}$ oder $t = se^{-s}$. Aus (1.3) folgt also

$$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} t^n,$$

und somit $b_n = n^{n-1}$.

Ein anderer Problemkreis, bei dem die Lagrangesche Inversionsformel nützlich, wenn auch nicht notwendig ist, sind die *Catalanzahlen*. Bei den meisten kombinatorischen Fragestellungen, bei denen die Catalanzahlen C_n auftauchen, z.B. Anzahl der Triangulierungen eines $(n+2)$-Ecks, Anzahl der binären Bäume mit n Stellen, Anzahl der verschiedenen Klammerungen eines Produktes von $n+1$ Faktoren, Anzahl der Wege im $\mathbb{R}^2$, die $(0,0)$ mit $(2n,0)$ verbinden und oberhalb der x-Achse verlaufen, usw., erhält man durch eine einfache Überlegung die Rekursionsformel

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}, \quad C_0 = 1. \tag{2.1}$$

Um die C_n explizit zu berechnen, betrachtet man die erzeugende Funktion

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n. \tag{2.2}$$

Aus (2.1) folgt dann

$$\frac{f(x)-1}{x} = f(x)^2. \tag{2.3}$$

Daraus kann man analog zum vorigen Beispiel die Koeffizienten C_n berechnen. Dazu setzen wir z.B. $f(x) = 1 + y(x)$, sodaß (2.3) zu

$$y = x(1+y)^2 \quad \text{oder} \quad x = y(1+y)^{-2}$$

wird. In (2.2) eingesetzt ergibt das

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{y^n}{(1+y)^{2n}}, \tag{2.5}$$

woraus mittels (I)

$$C_n = \frac{1}{n}(1+y)^{2n}\Big|_{y^{n-1}} = \frac{1}{n}\binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \text{ folgt .}$$

Hätten wir $z = xf(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_{n-1}x^n$ gesetzt, so erhielten wir aus (2.3)

$$z - x = z^2 \text{ oder } x = z(1-z),$$

also die zu (2.5) analoge Entwicklung

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1} z^n (1-z)^n, \tag{2.6}$$

woraus genauso $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ folgt.

3. Die mehrdimensionale Verallgemeinerung von Jacobi–Good. Wir verwenden die übliche Multiindexschreibweise. Eine f.P.R. in den s Variablen $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_s)$ ist eine Reihe

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_s) = \sum_{\mathbf{k} \geq \mathbf{0}} a_{\mathbf{k}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}} = \sum_{k_1, \dots, k_s \geq 0} a_{k_1 \dots k_s} \, x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_s^{k_s}.$$

Eine *formale Laurentreihe* (f.L.R.) sei eine Reihe der Form

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \geq \mathbf{n}} a_{\mathbf{k}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}} = \sum_{k_1 \geq n_1, \dots, k_s \geq n_s} a_{k_1 \dots k_s} \, x_1^{k_1} \cdots x_s^{k_s},$$

für einen Multiindex $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^s$.

Wir betrachten jetzt ein System $g = (g_i)_{1 \leq i \leq s}$ von f.P.R. in der s-dimensionalen Variablen $\mathbf{x}$, das der Einfachheit halber von der Form

$$g_i(\mathbf{x}) = \frac{x_i}{\varphi_i(\mathbf{x})} \tag{3.1}$$

ist, wobei $\varphi_i(\mathbf{x})$ eine f.P.R. mit $\varphi_i(\mathbf{0}) \neq 0$ ist. (Es würde genügen, daß die Jacobische von g im Nullpunkt eine Diagonalmatrix ist. Man müßte nur die f.L.R. etwas allgemeiner definieren, damit die folgenden Überlegungen sinnvoll bleiben.) Man kann zu (1.1) analoge Entwicklungen betrachten:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{0}) + \sum_{\mathbf{k} > \mathbf{0}} c_{\mathbf{k}} g(\mathbf{x})^{\mathbf{k}} = f(\mathbf{0}) + \sum c_{k_1 \dots k_s} g_1(\mathbf{x})^{k_1} \cdots g_s(\mathbf{x})^{k_s}.$$

Dann gilt das folgende mehrdimensionale Analogon der zweiten Version der Lagrangeformel (von der 1. Version sind nur äußerst komplizierte Verallgemeinerungen bekannt):

$$c_{\mathbf{n}} = f(\mathbf{x}) \cdot \det \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \cdot g(\mathbf{x})^{-\mathbf{n}-\mathbf{e}} \Big|_{\mathbf{x}^{-\mathbf{e}}} = f(\mathbf{x}) \cdot \det \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \cdot \varphi(\mathbf{x})^{\mathbf{n}+\mathbf{e}} \Big|_{\mathbf{x}^{\mathbf{n}}}. \tag{3.2}$$

Dabei ist $\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)$. Im Vergleich mit (II) ist die Ableitung $g'(x)$ durch die Funktionaldeterminante $\det \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}$ des Systems g ersetzt.

Der folgende Beweis stammt von J. Cigler.

Offensichtlich war der entscheidende Schritt im eindimensionalen Fall das Lemma 1. Wir müssen jetzt also zeigen:

Lemma 2. *Sei g wie in* (3.1). *Dann ist*

$$\det \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \cdot g(\mathbf{x})^{-\mathbf{n}-\mathbf{e}} \Big|_{\mathbf{x}^{-\mathbf{e}}} = \delta_{\mathbf{n},\mathbf{0}}.$$

Die Relation (1.2) ist äquivalent mit

$$f(g(x)) g'(x) \Big|_{x^{-1}} = f(x) \Big|_{x^{-1}} \text{ für beliebige f.L.R. } f(x). \tag{3.3}$$

Das erinnert an die Substitutionsformel für Integrale. Der Zusammenhang damit wird klar, wenn man den Koeffizienten von x^{-1} also das Residuum, durch das bekannte Kurvenintegral darstellt. Das legt auch nahe, daß im Mehrdimensionalen $g'(x)$ durch die Funktionaldeterminante ersetzt wird. Um diesen Zusammenhang besser hervorzuheben, erweist sich eine neue Notation als zweckmäßig: Statt $f(x)|_{x^{-1}}$ schreiben wir $M(f(x)dx)$. Das lineare Funktional M entspricht also dem Kurvenintegral $\frac{1}{2\pi i}\oint f(z)\,dz$. Die Integralschreibweise wollen wir aber im Hinblick auf unsere formalen Potenzreihen vermeiden. Wir definieren also

$$M(f(\mathbf{x})d\mathbf{x}) = M(f(x_1,\dots,x_s)\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_s) := f(\mathbf{x})\big|_{\mathbf{x}^{-\mathbf{e}}}. \tag{3.4}$$

Genaugenommen wählen wir M also als lineares Funktional auf den alternierenden Differentialformen von Dimension und Grad s (die wir hier allerdings als Modul über den f.L.R. statt den C^∞-Funktionen auffassen).

Beweis von Lemma 2. Für eine f.L.R. $g(\mathbf{x})$ sei

$$dg = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial g}{\partial x_j}\,dx_j.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} dg_1 \wedge dg_2 \wedge \cdots \wedge dg_s &= \Big(\sum_j \frac{\partial g_1}{\partial x_j} dx_j\Big) \wedge \cdots \wedge \Big(\sum_j \frac{\partial g_s}{\partial x_j} dx_j\Big) \\ &= \det\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right) \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_s. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Wir zeigen zunächst für beliebige f.L.R. $g_1,\dots,g_s$

$$M(dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_s) = 0. \tag{3.6}$$

Da alles linear ist, brauchen wir nur den Fall

$$g_i(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathbf{k}_i} = x_1^{k_{i1}} x_2^{k_{i2}} \cdots x_s^{k_{is}}$$

betrachten. Dann ist $\partial g_i(\mathbf{x})/\partial x_j = k_{ij}\mathbf{x}^{\mathbf{k}_i}/x_j$ und

$$\det \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{x}^{\mathbf{k}_1+\cdots+\mathbf{k}_s} \det\left(\frac{k_{ij}}{x_j}\right) = \mathbf{x}^{\mathbf{k}_1+\cdots+\mathbf{k}_s-\mathbf{e}} \det(k_{ij}).$$

Ist $\mathbf{k}_1 + \cdots + \mathbf{k}_s = 0$, dann verschwindet auch $\det(k_{ij})$, weil die Zeilensumme $= 0$ ist. Damit ist (3.6) gezeigt.

Weiters gilt für beliebige $g_1,\dots,g_s$

$$M(\frac{dx_1}{x_k} \wedge \cdots \wedge \frac{dx_k}{x_k} \wedge dg_{k+1} \wedge \cdots \wedge dg_s) = 0 \text{ für } k < s. \tag{3.7}$$

Dieser Ausdruck ist nämlich laut Definition gleich

$$M(\frac{1}{x_1\cdots x_k}\cdot D(\mathbf{x})\cdot dx_1\wedge\cdots\wedge dx_s) \text{ mit } D(\mathbf{x})=\det(\partial g_i/\partial x_j)_{k<i,j\leq s},$$

und diese Determinante hat wegen (3.6) keinen $\frac{1}{x_{k+1}\cdots x_s}$-Term.

Sind jetzt $g_1,\ldots,g_k$ von der speziellen Form (3.1), die weiteren $g_{k+1},\ldots,g_s$ jedoch noch beliebige f.L.R., so gilt auch

$$M(\frac{dg_1}{g_1}\wedge\cdots\wedge\frac{dg_k}{g_k}\wedge dg_{k+1}\wedge\cdots\wedge dg_s)=0 \text{ für } k<s. \tag{3.8}$$

Das folgt wegen

$$\frac{dg_i}{g_i}=\frac{dx_i}{x_i}-d(\log\varphi_i) \text{ für } i\leq k \tag{3.9}$$

durch Induktion nach k aus (3.7).

Für $k=s$ gilt jedoch, falls jetzt alle g_i (3.1) erfüllen,

$$M(\frac{dg_1}{g_1}\wedge\cdots\wedge\frac{dg_s}{g_s})=1. \tag{3.10}$$

Das zeigt man ebenfalls mit (3.9). Damit ist der Fall $\mathbf{n}=\mathbf{0}$ im Lemma 2 erledigt.

Sei jetzt $\mathbf{n}\neq\mathbf{0}$. Für jedes i mit $n_i\neq 0$ ist dann

$$g_i^{-n_i-1}dg_i=-\frac{1}{n_i}d(g_i^{-n_i}).$$

Die Behauptung $M(g^{-\mathbf{n}-\mathbf{e}}dg_1\wedge\cdots\wedge dg_s)=0$ reduziert sich daher auf den Typ (3.8). Damit ist das Lemma 2 vollständig gezeigt, und analog zum eindimensionalen Fall folgt die Formel von Lagrange–Good (3.2).

Als typische Anwendung wollen wir daraus das Master–Theorem von MacMahon [29] herleiten:

Master–Theorem. *Sei $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq s}$ eine beliebige Matrix und*

$$D(\mathbf{x})=\det(\delta_{ij}-a_{ij}x_j).$$

Dann ist der Koeffizient von $\mathbf{x}^\mathbf{n}$ in $\frac{1}{D(\mathbf{x})}$ gleich dem Koeffizienten von $x_1^{n_1}\cdots x_s^{n_s}$ in $(a_{11}x_1+\cdots+a_{1s}x_s)^{n_1}\cdots(a_{s1}x_1+\cdots+a_{ss}x_s)^{n_s}$.

Beweis. Wir wählen $\varphi_i(\mathbf{x})=1+\sum_{j=1}^{s}a_{ij}x_j$ und $f(\mathbf{x})=\frac{1}{D(g(\mathbf{x}))}$. Dann ist $\partial\varphi_i/\partial x_j=a_{ij}$ und $\partial g_i/\partial x_j=(\delta_{ij}-a_{ij}g_i)\varphi_i^{-1}$. Außerdem gilt

$$\det(\delta_{ij}-a_{ij}x_i)=x_1\cdots x_s\det\left(\frac{\delta_{ij}}{x_i}-a_{ij}\right)=x_1\cdots x_s\det(\frac{\delta_{ij}}{x_j}-a_{ij})=\det(\delta_{ij}-a_{ij}x_j).$$

Anwendung von (3.2) ergibt daher, daß der Koeffizient $c_\mathbf{n}$ von $g(\mathbf{x})^\mathbf{n}$ in $\frac{1}{D(g(\mathbf{x}))}$

$$c_\mathbf{n}=\prod_i\Big(1+\sum_j a_{ij}x_j\Big)^{n_i}\Big|_{\mathbf{x}^\mathbf{n}}=\prod_i\Big(\sum_j a_{ij}x_j\Big)^{n_i}\Big|_{\mathbf{x}^\mathbf{n}}$$

ist.

Formel (3.2) wird meistens nach Good [19] benannt. Sie war aber bereits Jacobi [23] bekannt. Weitere Beweise findet man in [5, 20, 24, 34].

4. Inverse Relationen. Das einfachste Paar inverser Relationen ist wohlbekannt:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k \quad \Leftrightarrow \quad b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k. \tag{4.1}$$

An die 60 weitere derartige Relationen findet man, in verschiedene Gruppen klassifiziert, bei Riordan [31], der ein Drittel seines Buches diesem Themenkreis widmet. Er gibt aber jedesmal ad hoc–Beweise und entwickelt keine gemeinsam zugrundeliegende Theorie. Offensichtlich besagt ein solches Paar inverser Relationen

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{nk} b_k \quad \Leftrightarrow \quad b_n = \sum_{k=0}^{n} \beta_{nk} a_k, \tag{4.2}$$

daß die beiden unendlichen Dreiecksmatrizen (α_{nk}) und (β_{nk}) zueinander invers sind:

$$\sum_k \alpha_{nk}\beta_{km} = \delta_{nm} = \sum_k \beta_{nk}\alpha_{km}. \tag{4.3}$$

Egoritschew [10] hat nun folgenden Ansatz zur Erzeugung inverser Relationen untersucht:
Seien $g(x), h(x)$ f.P.R. der Ordnung 1 und $f(x)$ eine f.P.R. der Ordnung 0, also mit $f(0) \neq 0$. Dann erhält man ein Paar inverser Relationen auf folgende Weise:

$$f(x)g(x)^k = \sum_{n=k}^{\infty} \alpha_{nk} h(x)^n \quad \Leftrightarrow \quad f(x)^{-1}h(x)^k = \sum_{n=k}^{\infty} \beta_{nk} g(x)^n. \tag{4.4}$$

Die Koeffizienten α_{nk}, β_{nk} dieser Entwicklungen lassen sich natürlich mittels der Lagrangeformel (II) sofort angeben:

$$\alpha_{nk} = M(\frac{f(x)g(x)^k h'(x)}{h(x)^{n+1}}dx) \quad \text{und} \quad \beta_{nk} = M(\frac{h(x)^k g'(x)}{f(x)g(x)^{n+1}}dx). \tag{4.5}$$

Egoritschew hat dann festgestellt, daß die meisten bekannten inversen Relationen, insbesondere *alle* in Riordan [31] enthaltenen, unter dieses einfache Schema fallen.

Beispiel.
(1) $\alpha_{nk} = \binom{n+k}{k+p}$ (siehe [31, Tafel 2.1.4]). Es gilt

$$\alpha_{nk} = \binom{n+p}{k+p} = M(\frac{(1+x)^{n+p}}{x^{n-k+1}}dx).$$

Entsprechend (4.5) wählen wir $h(x) = \frac{x}{1+x}$, $g(x) = x$, und wegen $h'(x) = (1+x)^{-2}$ schließlich $f(x) = (1+x)^{p+1}$.

$$\Rightarrow \beta_{nk} = M(\frac{(1+x)^{-k-p-1}}{x^{n+1-k}}dx) = \binom{-k-p-1}{n-k} = (-1)^{n-k}\binom{n+p}{n-k}.$$

(2) $\alpha_{nk} = \binom{p+qk-k}{n-k}$ ([31, Tafel 2.2.1]). Es gilt

$$\alpha_{nk} = M(\frac{(1+x)^{p+qk-k}}{x^{n-k+1}}dx).$$

Hier wählen wir also $g(x) = x(1+x)^{q-1}$, $h(x) = x$, $f(x) = (1+x)^p$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \beta_{nk} &= M\left(\frac{(1+x)^{q-1} + x(q-1)(1+x)^{q-2}}{(1+x)^p(1+x)^{(q-1)(n+1)}x^{n-k+1}}dx\right) \\
&= M\left(\frac{(1+x)^{-n(q-1)-p-1}(1+qx)}{x^{n-k+1}}dx\right) \\
&= \binom{-1-p-n(q-1)}{n-k} + q\binom{-1-p-n(q-1)}{n-k-1} \\
&= (-1)^{n-k}\binom{p+nq-k}{n-k} + (-1)^{n-k-1}q\binom{p+nq-k-1}{n-k-1} \\
&= (-1)^{n-k}\binom{p+nq-k}{n-k}\frac{p+kq-k}{p+nq-k}.
\end{aligned}$$

(3) $a_n = \sum_k \binom{n}{k} b_{n-ck}$ ([31, Tafel 2.4.1]). Hier gilt

$$\alpha_{n,n-ck} = \binom{n}{k} = M\left(\frac{(1+x^c)^n}{x^{ck+1}}dx\right).$$

Wir wählen $g(x) = x$, $h(x) = \frac{x}{1+x^c}$, $h'(x) = \frac{1+x^c-cx^c}{(1+x^c)^2}$, $f(x) = \frac{1+x^c}{1+x^c-cx^c}$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \beta_{n,n-ck} &= M\left(\frac{g'}{f\cdot g}\left(\frac{h}{g}\right)^n \frac{dx}{h^{ck}}\right) \\
&= M\left(\frac{1+x^c-cx^c}{(1+x^c)^{n+1-ck}}\frac{dx}{x^{1+ck}}\right) \\
&= \binom{ck-n}{k} - c\binom{ck-n-1}{k-1} \\
&= (-1)^k\binom{n-ck+k-1}{k} - c(-1)^{k-1}\binom{n-ck+k-1}{k-1} \\
&= (-1)^k\frac{n}{k}\binom{n-ck+k-1}{k-1}.
\end{aligned}$$

Ein Spezialfall, beziehungsweise bloß eine andere Schreibweise für inverse Relationen, ist die *umbrale Inversion* von Polynomen. Nehmen wir z.B. die *Gegenbauerpolynome* $C_n^\lambda(x)$, die durch die erzeugende Funktion

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^\lambda(x)t^n = (1-2xt+t^2)^{-\lambda} \tag{4.6}$$

definiert sind. Daraus lassen sich die C_n^λ bekanntlich leicht berechnen:

$$C_n^\lambda(x) = \sum_{n=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(\lambda)^{(n-k)}(2x)^{n-2k}}{k!\,(n-2k)!}. \tag{4.7}$$

Hier und im Folgenden bedeutet das Symbol $(a)^{(n)}$ die aufsteigenden Faktoriellen, $(a)^{(n)} := a(a+1)\cdots(a+n-1)$.

Wir wollen nun umgekehrt x^n nach den $C_k^\lambda(x)$ entwickeln. Dazu schreiben wir (4.6) in der Form

$$(1+t^2)^\lambda \sum_k C_k^\lambda(x)t^k = (1 - \frac{2tx}{1+t^2})^{-\lambda} = \sum_n \frac{(\lambda)^{(n)}}{n!}(2x)^n \frac{t^n}{(1+t^2)^n}.$$

Diese Gleichung kann man als Entwicklung der Funktion auf der linken Seite nach Potenzen von $\frac{t}{1+t^2}$ interpretieren. Für die Koeffizienten muß daher nach (II) gelten:

$$\begin{aligned}
\frac{(\lambda)^{(n)}}{n!}(2x)^n &= (1+t^2)^\lambda \cdot \sum_k C_k^\lambda(x)t^k \cdot (1+t^2)^{n+1} \frac{1+t^2-2t^2}{(1+t^2)^2}\Big|_{t^n} \\
&= \sum_k C_k^\lambda(x)t^k \cdot (1+t^2)^{\lambda+n-1}(1-t^2)\big|_{t^n} \\
&= \sum_k C_{n-2k}^\lambda(x) \left[\binom{n+\lambda-1}{k} - \binom{n+\lambda-1}{k-1}\right] \\
&= \sum_k C_{n-2k}^\lambda(x) \binom{n+\lambda-1}{k} \frac{n+\lambda-2k}{n+\lambda-k}.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^n = 2^{-n} n! \sum_k \frac{n+\lambda-2k}{k!\,(\lambda)^{(n+1-k)}} C_{n-2k}^\lambda(x). \tag{4.8}$$

Ein einfacheres Beispiel sind die *Laguerrepolynome*

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{n!}{k!}(-x)^k \tag{4.9}$$

mit der erzeugenden Funktion

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{n!} t^n = (1-t)^{-1-\alpha} e^{\frac{tx}{t-1}}. \tag{4.10}$$

Man könnte hier analog vorgehen. Diese Rechnung haben wir im Wesentlichen aber schon durchgeführt: Ein Blick auf Beispiel 1 zeigt sofort

$$x^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{n!}{k!} L_k^{(\alpha)}(x). \tag{4.11}$$

Auf dieselbe Weise lassen sich die meisten Inversionen der bekannten speziellen Polynome herleiten.

5. Folgen von Binomialtyp. Betrachten wir für eine f.P.R. $g(z) = z/\varphi(z)$ mit $\varphi(z) \neq 0$ die Entwicklung

$$e^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(x)}{n!} g(z)^n. \tag{5.1}$$

Dann ist offensichtlich $p_n(x)$ ein Polynom vom Grad n in x und $p_n(0) = \delta_{n0}$. Aus $e^{(x+y)z} = e^{xz} \cdot e^{yz}$ folgt

$$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}(y), \tag{5.2}$$

d.h. (p_n) ist eine *Folge von Binomialtyp* (siehe [33]).

Bezeichnen wir mit D den Differentiationsoperator nach x und wenden diesen auf (5.1) an, so folgt

$$ze^{xz} = \sum_n \frac{Dp_n(x)}{n!} g(z)^n,$$

und durch Iteration erhält man

$$g(z)e^{xz} = \sum_n \frac{g(D)p_n(x)}{n!} g(z)^n.$$

Nach Division durch $g(z)$ erhält man durch Koeffizientenvergleich mit (5.1)

$$g(D)p_n(x) = np_{n-1}(x). \tag{5.3}$$

Außerdem sieht man leicht, daß diese Relation gemeinsam mit den Anfangswerten $p_n(0) = \delta_{n0}$ die Polynome $p_n(x)$ charakterisiert.

Beispiel. Für $g(z) = ze^{-az}$ haben wir in (1.4) als Koeffizienten die Abelpolynome $A_n^{(a)}(x) = x(x+an)^{n-1}$ erhalten. Diese erfüllen daher (5.2), und (5.3) besagt

$$De^{-aD} A_n^{(a)}(x) = DA_n^{(a)}(x-a) = nA_{n-1}^{(a)}(x).$$

Aus der Entwicklung (5.1) erhält man durch Anwendung der Lagrangeformel:

$$\text{(I)} \ \Rightarrow \frac{p_n(x)}{n!} = \frac{1}{n} xe^{xt} \varphi(t)^n \Big|_{t^{n-1}} = \frac{x \cdot \varphi(D)^n x^{n-1}}{n!},$$

da $a(D)\frac{x^n}{n!} = a(t)e^{xt}\Big|_{t^n}$ für beliebige f.P.R. $a(t)$. Also

$$p_n(x) = x \cdot \varphi(D)^n x^{n-1}. \tag{5.4}$$

(II) $\Rightarrow p_n(x) = n!\, e^{xt} g'(t) \varphi(t)^{n+1}|_{t^n}$, also

$$p_n(x) = g'(D)\varphi(D)^{n+1} x^n. \tag{5.5}$$

Diese beiden wichtigen Formeln (5.4) und (5.5), die „closed forms“ aus [33, p. 695], sind also unmittelbare Folgerungen aus der Lagrangeschen Inversionsformel.

Umgekehrt läßt sich aus ihnen (I) und (II) herleiten (siehe [5, 13, 32]): Dazu faßt man die Entwicklung (1.1) als linearen Operator auf dem Raum der Polynome auf:

$$f(D) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \, g(D)^k.$$

Wendet man diesen Operator auf die Polynome $p_n(x)$ an, so gilt wegen (5.3)

$$Lf(D)p_n = \sum_k c_k L g(D)^k p_n = c_n \cdot n!,$$

wenn $Lp(x) = p(0)$ die Auswertung im Nullpunkt bezeichnet. Setzt man nun für $p_n(x)$ (5.4) und (5.5) ein, erhält man

$$n!\, c_n = Lf(D)\, x \cdot \varphi(D)^n x^{n-1} = Lf'(D)\varphi(D)^n x^{n-1} = (n-1)!\, f'(z)\varphi(z)^n \Big|_{z^{n-1}}$$

beziehungsweise

$$n!\, c_n = Lf(D)g'(D)\varphi(D)^{n+1} x^n = n!\, f(z)g(z)\varphi(z)^{n+1} \Big|_{z^n}.$$

Dabei wurden nur die trivialen Formeln

$$f(D)x - xf(D) = f'(D) \qquad \text{und} \qquad Lf(D)x^n = n!\, f(z)\Big|_{z^n}$$

verwendet.

Die Folgen vom Binomialtypen lassen sich natürlich aufs Mehrdimensionale verallgemeinern und das entsprechende Analogon von (5.5) liefert dann die Lagrange–Good-Formel (3.2). Siehe dazu [5, 20, 24] und [2] für den Fall nichtkommutierender Variable.

Weitere Beispiele für Folgen von Binomialtyp sind die oberen und unteren Faktoriellen $(x)^{(n)} = x(x+1)\cdots(x+n-1)$ und $(x)_n = x(x-1)\cdots(x-n+1)$, die Laguerrepolynome $L_n^{(\alpha)}(x)$ aus (4.9) für $\alpha = -1$ und die Gouldpolynome $G_n(x,b)$ aus (1.7).

Eine geringfügige Verallgemeinerung sind die *Shefferpolynome*. Sie entstehen als Koeffizienten in einer Entwicklung

$$f(z)e^{xz} = \sum_n \frac{s_n(x)}{n!} g(z)^n \tag{5.6}$$

und haben ganz ähnliche Eigenschaften wie die $p_n(x)$. Die wichtigsten Beispiele sind die Hermitepolynome und Laguerrepolynome $L_n^{(\alpha)}(x)$ (für jedes α).

Mit der Lagrangeschen Inversionsformel läßt sich (5.6) verallgemeinern zu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n(x+ny)}{n!} \left(g(z)e^{-yz}\right)^n = f(z)e^{xz} \left(1 - y\frac{g(z)}{g'(z)}\right)^{-1}. \tag{5.7}$$

Zum Beweis braucht man bloß in (II) einsetzen und erhält als Koeffizienten

$$\frac{e^{(x+yn)z} f(z) g'(z)}{g(z)^{n+1}}\Big|_{z^n}.$$

(II) auf (5.6) angewendet zeigt dann, daß dieser Ausdruck gleich $s_n(x+nx)/n!$ ist.

Seien jetzt $s_n(x)$ durch (5.6) gegeben und eine Folge $p_n(x)$ vom Binomialtyp durch $\sum_n p_n(x)/n!\, h(z)^n = e^{xz}$. Wenn wir nun die $p_n(x)$ nach den $s_k(x)$ entwickeln und umgekehrt, erhalten wir ein Paar inverser Relationen:

$$\frac{p_n(x)}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{nk} \frac{s_k(x)}{k!} \quad \text{und} \quad \frac{s_n(x)}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \beta_{nk} \frac{p_k(x)}{k!}. \tag{5.8}$$

Rota [33] hat mit diesem Ansatz einen eleganteren und einheitlicheren Zugang zu Riordans inversen Relationen von Gould- und Abel-Typ gefunden. Wegen

$$e^{xz} = \sum_n \frac{p_n(x)}{n!} h(z)^n = \sum_k \frac{s_k(x)}{k!} \sum_n \alpha_{nk} h(z)^n,$$

folgt durch Koeffizientenvergleich mit (5.6)

$$f(z)^{-1} g(z)^k = \sum_n \alpha_{nk} h(z)^n,$$

und analog

$$f(z)h(z)^k = \sum_n \beta_{nk} g(z)^n.$$

Die inversen Relationen (5.8), die als Zusammenhangskoeffizienten zwischen zwei Shefferpolynomen auftreten, sind also dieselben, die man mit Egoritschews Methode erhält. Insbersondere lassen sich daher *alle* inversen Relationen von Riordan aus dem umbralen Kalkül herleiten (obwohl das in [33, Problem 1] für die Legendre und Tschebischeff-Typen bestritten wird).

6. Garsias q-Analogon. L. Carlitz [3] gab 1973 folgendes schöne q-Analogon der Lagrangeformeln im Spezialfall $\varphi(z) = 1 - z$ an:

$$f(z) = \sum_n c_n \frac{z^n}{(1-z)(1-qz)\cdots(1-q^{n-1}z)} \tag{6.1}$$

mit

$$(6.2)\qquad c_n = \frac{1}{[n]} f'(z)(1-z)(1-qz)\cdots(1-q^{n-1}z)\big|_{z^{n-1}}$$
$$= f(z)(1-z)(1-qz)\cdots(1-q^{n-2}z)\big|_{z^n}.$$

(Hier steht $[n]$ für $(q^n-1)/(q-1) = 1+q+\cdots+q^{n-1}$, $f'(z)$ bezeichnet die q-Ableitung $(f(qz)-f(z))/(q-1)z$. Siehe [8].)

Dieses überaus schöne Beispiel war der Anlaß für eine intensive Suche nach einem q-Analogon der Lagrangeschen Inversionsformel. Heute kennt man zwei verschiedenartige Theorien, die außer Carlitz's Beispiel wenig Gemeinsames haben. Der naheliegende und zunächst (von Andrews [1], Gessel [16], Garsia und Joni [12, 14]) untersuchte Ansatz in der Form

$$(6.3)\qquad f(z) = \sum_k c_k g(z)g(qz)\cdots g(q^{k-1}z)$$

ist in formaler Hinsicht äußerst befriedigend, die meisten interessanten Dinge in dieser Theorie haben im klassischen Fall $q=1$ aber kein Gegenstück.

Die andere Richtung (siehe [7, 18, 20, 22, 25]) leistet wahrscheinlich eher das, was man sich anfangs erhofft hat: neue q-Analoga für die Dinge zu liefern, die man mit der klassischen Lagrangeformel behandeln kann, etwa q-Analoga der inversen Relationen, Zusammenhänge mit den bekannten q-Analoga der speziellen Polynome, etc.

Wenden wir uns zunächst dem Ansatz (6.3) zu. Diese Form der „q-Potenzen“ von $g(z)$ hat folgende erstaunliche Eigenschaft:

Satz. *Es gibt zu jeder f.P.R. $g(z)$ (der Ordnung 1) eine f.P.R. $G(z)$, sodaß gilt:*

$$(6.4)\qquad \sum_k a_k z^k = \sum_k b_k g(z)g(qz)\cdots g(q^{n-1}z)$$
$$\Leftrightarrow \quad \sum_k a_k G(z)G(z/q)\cdots G(z/q^{k-1}) = \sum_k b_k z^k.$$

$G(z)$ nennen wir die q-Inverse von $g(z)$. g ist dann die $\frac{1}{q}$-Inverse von G.

Beweis. Sei

$$z = \sum_{n\geq 1} G_n\, g(z)g(qz)\cdots g(q^{n-1}z) \quad \Rightarrow \quad G(z) := \sum_{n\geq 1} G_n z^n.$$
$$\Rightarrow z^2 = \sum_k G_k\, g(z)g(qz)\cdots g(q^{k-1}z)q^{-k}\cdot q^k z$$
$$= \sum_k q^{-k} G_k\, g(z)\cdots g(q^{k-1}z)\cdot \sum_l G_l g(q^k z)\cdots g(q^{k+l-1}z)$$
$$= \sum_n \Big(\sum_k q^{-k} G_k G_{n-k}\Big) g(z)\cdots g(q^{n-1}z)$$

und

$$\sum_n \Big(\sum_k q^{-k} G_k G_{n-k} \Big) z^n = \sum_k q^{-k} G_k z^k \cdot \sum_l G_l z^l = G(z) \cdot G(z/q),$$

usw.

Um für die Entwicklung (6.3) eine Lagrangeformel zu finden, brauchen wir eine entsprechende Verallgemeinerung von Lemma 1.

Lemma 3. *Es gibt (genau) eine f.P.R.* $g^0(z)$*, so daß*

$$M\left(\frac{g^0(z)dz}{g(z)g(z/q)\cdots g(z/q^n)} \right) = \delta_{n0}. \tag{6.5}$$

Dieses $g^0(z)$ muß also ein q-Analogon der Ableitung $g'(z)$ sein, es ist aber *nicht* die übliche q-Ableitung. Wir werden zwar einige Formeln für dieses $g^0(z)$ herleiten, konkret ausrechnen läßt es sich aber anscheinend nur in Carlitz's Beispiel.

Beweis. Schreiben wir $g(z) = z/\varphi(z)$, so wird (6.5) zu

$$g^0(z)\varphi(z)\varphi(z/q)\cdots\varphi(z/q^n)\big|_{z^n} = \delta_{n0}. \tag{6.6}$$

Setzt man jetzt $g^0(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \cdots$ unbestimmt an, dann kann man daraus sukzessive die γ_n berechnen.

Kehren wir jetzt zur Entwicklung (6.3) zurück. Wir dividieren durch $g(z)\cdots g(q^n z)$ und ersetzen z durch z/q^n:

$$\Rightarrow \frac{f(z/q^n)}{g(z)g(z/q)\cdots g(z/q^n)} = \frac{c_0}{g(z)\cdots g(z/q^n)} + \frac{c_1}{g(z)\cdots g(z/q^{n-1})} + \cdots + \frac{c_n}{g(z)} + c_{n+1} + c_{n+2}\, g(qz) + \cdots .$$

Durch Multiplikation mit $g^0(z)$ folgt aus Lemma 3

$$c_n = M\left(\frac{f(z/q^n)g^0(z)dz}{g(z)g(z/q)\cdots g(z/q^n)} \right) = q^n M\left(\frac{f(z)g^0(q^n z)dz}{g(z)g(qz)\cdots g(q^n z)} \right) \tag{6.7}$$

oder

$$c_n = q^{-\binom{n}{2}} f(z) g^0(q^n z)\varphi(z)\cdots\varphi(q^n z)\big|_{z^n}. \tag{6.8}$$

Das ist Garsias q-Analogon der 2. Version der Lagrangeschen Inversionsformel. Andrews [1] hat ein q-Analogon der 1. Version angegeben, das allerdings viel komplizierter ist, er stellt c_n nämlich als $(n+1) \times (n+1)$-Determinante dar.

Wir wollen noch zwei Formeln für $g^0(z)$ herleiten: Für $q = 1$ gilt für die Koeffizienten γ_n von $g^0(z) = \sum_n \gamma_n z^n$

$$\gamma_n = g'(z)\big|_{z^n} = M\left(\frac{g'(z)dz}{z^{n+1}} \right) = M\left(\frac{dz}{G(z)^{n+1}} \right)$$

nach der Substitutionsformel (3.3), wenn $G(z)$ die zu $g(z)$ inverse Potenzreihe ist. Dafür lautet das q-Analogon:

$$\gamma_n = M\left(\frac{dz}{G(z)G(z/q)\cdots G(z/q^n)}\right). \tag{6.9}$$

Beweis. Ein Blick auf (6.4) zeigt, daß wir den Koeffizienten b_n jetzt auf zwei Arten berechnen können. Das ergibt für beliebige b_n die Gleichnung

$$q^n M\left(\frac{g^0(q^n z)\sum_k a_k z^k}{g(z)\cdots g(q^n z)}dz\right) = M\left(\frac{\sum_k a_k G(z)\cdots G(z/q^{k-1})}{z^{n+1}}dz\right), \tag{6.10}$$

ein q-Analogon der Substitutionsformel (3.3).

Setzen wir jetzt $\sum_k a_k z^k = g(z)\cdots g(q^n z) z^{-n-1}$, so folgt wegen (6.4)

$$\begin{aligned} g(z)\cdots g(q^n z) &= \sum_k a_k z^{k+n+1} \\ \Rightarrow z^{n+1} &= \sum_k a_k G(z)\cdots G(z/q^{k+n}) \\ \Rightarrow \frac{z^{n+1}q^{(n+1)^2}}{G(qz)\cdots G(q^{n+1}z)} &= \sum_k a_k G(z)G(z/q)\cdots G(z/q^{k-1}). \end{aligned}$$

In (6.10) eingesetzt erhalten wir

$$q^n M\left(\frac{g^0(q^n z)}{z^{n+1}}dz\right) = q^{(n+1)^2} M\left(\frac{dz}{G(qz)\cdots G(q^{n+1}z)}\right)$$

also

$$\gamma_n = M\left(\frac{dz}{G(z)G(z/q)\cdots G(z/q^n)}\right).$$

Für die zweite Formel brauchen wir noch etwas Notation, nämlich Garsias „roofing“ und „starring“: Für f.P.R. $f(z) = \sum_k a_k z^k$ sei

$$\hat{f}(z) = \sum_k a_k q^{-\binom{k}{2}} z^k$$

und, falls $a_0 = 1$,

$$f^*(z) = f(z)f(qz)f(q^2 z)\cdots .$$

Dieses unendliche Produkt konvergiert für $|q| < 1$ oder formal, wenn man $f^*(z)$ als f.P.R. mit rationalen Funktionen in q als Koeffizienten auffaßt. Dieses $f^*(z)$ ist auch die einzige f.P.R. mit $f^*(0) = 1$ und

$$f(z)\cdot f^*(qz) = f^*(z).$$

Es gilt dann für $g(z) = z/\varphi(z)$ und $\varphi(0) = 1$

$$g^0(z) = \varphi^*(qz) \cdot \left(\frac{1}{\hat{\varphi}^*(z/q)} \right)^{\widehat{}}. \tag{6.11}$$

Beweis. Setzen wir $g^0(z) = \varphi^*(qz) \cdot \hat{\psi}(z)$ an. Dann wird (6.6) zu

$$\varphi^*(z/q^n)\hat{\psi}(z)|_{z^n} = \delta_{n0}.$$

Durch Einsetzen von $\varphi^*(z) = \sum_n \varphi_n z^n$ und $\psi(z) = \sum_n \psi_n z^n$ sieht man erstaunt ein, daß diese Gleichung äquivalent ist mit

$$\hat{\varphi}^*(z/q) \cdot \psi(z)\Big|_{z^n} = \delta_{n0},$$

woraus schließlich $\hat{\varphi}^*(z/q) \cdot \psi(z) = 1$ folgt.

In [12] findet man noch eine Fülle solcher eigenartiger Identitäten mit * und $\hat{}$, die wahrscheinlich das Reizvollste an dieser Theorie sind, für $q = 1$ aber ihren Sinn verlieren.

Leider kann man all diese Formeln für $g^0(z)$ anscheinend nur in einem Fall konkret verwerten, nämlich für $\varphi(z) = 1 - z$, also Carlitz's Beispiel: Es ist dann

$$\varphi^*(z) = \prod_{i=0}^{\infty}(1 - q^i z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n q^{\binom{n}{2}}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)},$$

daher

$$\hat{\varphi}^*(z) = \sum_n \frac{(-z)^n}{(1-q)\cdots(1-q^n)}, \qquad \frac{1}{\hat{\varphi}^*(z)} = \sum_n \frac{q^{\binom{n}{2}} z^n}{(1-q)\cdots(1-q^n)}$$

$$\left(\frac{1}{\hat{\varphi}^*(z)}\right)^{\widehat{}} = \sum_n \frac{q^{\binom{n}{2}} z^n}{(1-q)\cdots(1-q^n)} = \prod_{i=0}^{\infty}(1 - q^i z)^{-1} = \frac{1}{\varphi^*(z)},$$

$$\Rightarrow g^0(z) = \varphi^*(qz) \cdot \varphi^*(z/q)^{-1} = \frac{1}{(1-z)(1-z/q)},$$

sodaß (6.8) in diesem Fall wirklich (6.2) liefert.

Man kann auch ein q-Analogon der Folgen von Binomialtyp studieren: Ausgehend von

$$e^{xz} = \sum_n \frac{p_n(x)}{n!} g(z)g(qz)\cdots g(q^{n-1}z)$$

lassen sich genauso wie in Kap. 5 die folgenden Formeln herleiten:

$$p_n(x+y) = \sum_k \binom{n}{k} p_n(x) p_{n-k}(y/q^k)$$

$\varepsilon g(D)p_n = np_{n-1}$, wobei D der gewöhnliche Differentiationsoperator und $\varepsilon f(x) = f(qx)$ ist,

$$p_n(x) = q^{-\binom{n}{2}} g^0(q^n D)\varphi(D)\cdots\varphi(q^n D)x^{n-1}.$$

7. Ein allgemeiner Ansatz, weitere q-Analoga. Wir wollen uns jetzt mit allgemeineren Entwicklungen

$$f(z) = \sum_k c_k g_k(z) \tag{7.1}$$

beschäftigen, wo $g_k(z)$ eine f.L.R. der Ordnung k ist (die *Ordnung* einer formalen Laurentreihe ist wie bei formalen Potenzreihen definiert, siehe Lemma 1), und versuchen, hier die Koeffizienten c_k zu berechnen.

Dazu müßte man f.L.R. $G_n(z)$ der Ordnung $-n$ finden, sodaß etwa

$$L\ g_k(z) G_n(z) = \delta_{nk} \tag{7.2}$$

für alle ganzen Zahlen n, k gilt. Dabei sei L das lineare Funktional

$$Lf(z) = f(z)|_{z^0} = M\left(\frac{f(z)}{z} dz\right).$$

Dann würde für den Koeffizienten c_n aus (7.1) nämlich gelten:

$$c_n = Lf(z)\ G_n(z). \tag{7.3}$$

Für $g_k(z) = g(z)^k$ beispielsweise ist wegen Lemma 1

$$G_n(z) = \frac{zg'(z)}{g(z)^{n+1}}. \tag{7.4}$$

Es stellt sich daher das Problem, ob man die $G_n(z)$ auch für allgemeinere $g_k(z)$ explizit angeben kann. Mit der folgenden Methode gelingt das in einigen wichtigen Fällen.

Nehmen wir an, daß unsere Folge $g_n(z)$ die Eigenvektoren eines Operators sind, beziehungsweise seien allgemeiner U, V zwei lineare Operatoren auf dem Raum der f.L.R., und es gelte für irgendwelche reellen Zahlen c_n:

$$Ug_n = c_n V g_n. \tag{7.5}$$

$\langle a(z), b(z)\rangle = La(z)b(z)$ ist ein inneres Produkt auf den f.L.R.

Ist V bijektiv, dann gibt es eindeutig bestimmte f.L.R. $\tilde{g}_k(z)$ der Ordnung $-k$, die zu den $Vg_n(z)$ biorthogonal sind:

$$\begin{aligned} &\langle \tilde{g}_k, Vg_n\rangle = \delta_{nk} \\ \Rightarrow &\langle \tilde{g}_k, Ug_n\rangle = c_n\langle \tilde{g}_k, Vg_n\rangle c_n\delta_{nk} = c_k\delta_{nk}. \\ \Rightarrow &\langle U^*\tilde{g}_k, g_n\rangle = c_k\langle V^* g_k, g_n\rangle \end{aligned} \tag{7.6}$$

also:

$$U^*\tilde{g}_k = c_k V^*\tilde{g}_k \quad \text{und} \tag{7.7}$$

$$G_k = V^*\tilde{g}_k \quad \text{erfüllt} \quad \langle G_k, g_n\rangle = \delta_{nk}. \tag{7.8}$$

Die Methode besteht also darin, zunächst Hilfsfunktionen $\tilde{g}_k(z)$ zu berechnen, die ein ähnliches Eigenwertsproblem wie die $g_n(z)$ (nur für die adjungierten Operatoren) erfüllen, und daraus kann man dann die gesuchten G_n konstruieren.

Beispiele für Operatoren.

(1) $\varepsilon_q f(x) = f(qx) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_q^* f(x) = f(\frac{x}{q})$.

(2) Multiplikationsoperator $Uf(x) = a(x)f(x)$: $U = U^*$.

(3) $Uf(x) = xf'(x) \quad \Rightarrow \quad U^* f(x) = -xf'(x)$.

Jetzt können wir an Hand der klassischen Lagrangeformel zeigen, daß diese Methode überhaupt funktioniert: Die Potenzen $g_n(z) = g(z)^n$ erfüllen bekanntlich

$$g_n'(z) = n g_n(z) \cdot \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Das ist eine Gleichung der Form (7.5), wenn wir z.B. $U = xD$, $V = xg'(x)/g(x)$ und $c_n = n$ wählen. Die $\tilde{g}_k(x)$ erfüllen daher nach (7.7)

$$\begin{aligned} \tilde{g}_k'(x) &= -k\tilde{g}_k(x)\frac{g'}{g} \quad \text{d.h.} \\ \tilde{g}_k(x) &= g(x)^{-k} \quad \text{und} \\ G_k(x) &= V^*\tilde{g}_k = x\frac{g'(x)}{g(x)^{k+1}}, \text{ also genau (7.4).} \end{aligned}$$

Egoritschews Ansatz für inverse Relationen läßt sich natürlich leicht auf diese allgemeine Situation übertragen: Betrachten wir neben (g_n) noch eine zweite Folge (h_n) mit

$$L h_n H_k = \delta_{nk},$$

dann ist

$$\alpha_{nk} = Lf(x)g_k(x)H_n(x) \qquad \beta_{nk} = Lf(x)^{-1}h_k(x)G_n(x) \tag{7.9}$$

ein Paar inverser Relationen, wie man aus den beiden Entwicklungen

$$\begin{aligned} f(x)g_k(x) &= \sum_n \alpha_{nk} h_n(x) \text{ und} \\ f(x)^{-1}h_k(x) &= \sum_n \beta_{nk} g_n(x) \end{aligned}$$

unmittelbar entnimmt.

Krattenthalers q-Analogon. Seien φ_n, ψ_n zwei Folgen f.P.R. mit

$$\begin{aligned} \varphi_n' &= [n]\varphi_n(x)\varphi(x) \qquad (' \text{ ist jetzt die } q\text{-Ableitung }) \\ \psi_n' &= q^{-n}[n]\psi_n(qx)\psi(x), \end{aligned} \tag{7.10}$$

und sei

$$g_n(x) = \frac{x^n}{\varphi_n(x)\psi_n(x)}. \tag{7.11}$$

Für die Entwicklung (7.1) nach solchen „q-Potenzen“ $g_n(x)$ konnte Krattenthaler [25, 26] folgende q-Lagrangeformel zeigen:

$$c_n = \frac{1}{[n]} f'(x)\varphi_n(x)\psi_n(qx)\Big|_{x^{n-1}} \tag{7.12}$$

$$= f(x)\varphi_n(\frac{x}{q})\psi_n(qx)\left(1 - \frac{x}{q}\varphi\left(\frac{x}{q}\right) - x\psi(x)\right)\Big|_{x^n}. \tag{7.13}$$

Zum Beweis schreiben wir (7.10) um in

$$\begin{aligned}
\varphi_n(qx) &= \varphi_n(x)(1 + (q^n - 1)x\varphi(x)) \\
\psi_n(x) &= \psi_n(qx)(1 + (q^{-n} - 1)x\psi(x)). \\
\Rightarrow \quad \frac{g_n(qx)}{g_n(x)} &= \frac{q^n + (1 - q^n)x\psi(x)}{1 + (q^n - 1)x\varphi(x)}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad g_n(qx)(1 - x\varphi(x)) - x\psi(x)g_n(x) = q^n[g_n(x)(1 - x\psi(x)) - x\varphi(x)g_n(qx)]. \tag{7.14}$$

Diese Gleichung ist genau eine Eigenwertgleichung der Form (7.5). Es folgt daher

$$\tilde{g}_n\left(\frac{x}{q}\right)\left(1 - \frac{x}{q}\varphi\left(\frac{x}{q}\right)\right) - x\psi(x)\tilde{g}_n(x) = q^n\left[\tilde{g}_n(x)(1 - x\psi(x)) - \frac{x}{q}\varphi\left(\frac{x}{q}\right)\tilde{g}_n\left(\frac{x}{q}\right)\right].$$

Aus dieser q-Differenzgleichung für $\tilde{g}_n(x)$ ergibt sich

$$\frac{\tilde{g}_n(\frac{x}{q})}{\tilde{g}_n(x)} = \frac{q^n + (1 - q^n)x\psi(x)}{1 + (q^n - 1)\frac{x}{q}\varphi(\frac{x}{q})} = q^n \frac{\psi_n(x)}{\psi_n(qx)}\frac{\varphi_n(x/q)}{\varphi_n(x)},$$

$$\Rightarrow \tilde{g}_n(x) = \frac{\varphi_n(x)\psi_n(qx)}{x^n}. \tag{7.15}$$

Die zu $g_n(x)$ orthogonalen $G_n(x)$ errechnen sich nach (7.8) zu

$$\begin{aligned}
G_n(x) &= (1 - x\psi(x))\tilde{g}_n(x) - \frac{x}{q}\varphi\left(\frac{x}{q}\right)\tilde{g}_n\left(\frac{x}{q}\right) \\
&= x^{-n}\varphi_n\left(\frac{x}{q}\right)\psi_n(qx)\Bigg\{(1 - x\psi(x))\left(1 + (q^n - 1)\frac{x}{q}\varphi\left(\frac{x}{q}\right)\right) \\
&\qquad - \frac{x}{q}\varphi\left(\frac{x}{q}\right)(q^n + (1 - q^n)x\psi(x))\Bigg\} \\
&= x^{-n}\varphi_n\left(\frac{x}{q}\right)\psi_n(qx)\left(1 - \frac{x}{q}\varphi\left(\frac{x}{q}\right) - x\psi(x)\right).
\end{aligned}$$

Das liefert wegen $c_n = Lf(x)G_n(x)$ das q-Analogon der 2. Version (7.13).

Die 1. Version erhält man aus der Beobachtung

$$
\begin{aligned}
g_n'(x) &= \left(\frac{x^n}{\psi_n(x)}\right)' \frac{1}{\varphi_n(x)} + \frac{(qx)^n}{\psi_n(qx)} \left(\frac{1}{\varphi_n(x)}\right)' \\
&= \frac{[n]x^{n-1}}{\psi_n(x)}(1 - x\psi(x))\frac{1}{\varphi_(x)} - \frac{(qx)^n}{\psi_n(qx)} \frac{[n]\varphi(x)}{\varphi_n(qx)} \\
&= \frac{[n]}{x}\{g_n(x)(1 - x\psi(x)) - x\varphi(x)g_n(qx)\} = \frac{[n]}{x} V g_n.
\end{aligned}
$$

Wegen (7.6) folgt daher

$$L g_n'(x)\frac{\tilde{g}_k(x)}{x} = [n]\delta_{nk},$$

und somit

$$c_n = \frac{1}{[n]} f'(x)\varphi_n(x)\psi_n(qx)\big|_{x^{n-1}}.$$

Der ursprüngliche Beweis von Krattenthaler ist etwas eleganter: Er erhält die Orthogonalitätsrelationen direkt durch Ableiten des Quotienten g_k/g_n. Für einen weiteren Beweis mit Hilfe von Polynomen (analog zu Kap. 5) siehe [21].

Die Schwierigkeit bei diesem q-Analogon ist es, konkrete Beispiele für Folgen φ_n beziehungsweise ψ_n mit (7.10) zu finden. Das derzeit allgemeinste bekannte Beispiel ist

$$\varphi_n(x) = e_r((a[n] + b)x^r)/e_r(bx^r),$$

wobei $e_r(x)$ die q^r-Exponentialfunktion ist (siehe [8, § 1.2]). $\psi_n(x)$ erhält man daraus, indem man entweder n durch $-n$ oder q durch $\frac{1}{q}$ ersetzt. Für die Anwendungen reicht das aber vollkommen aus.

Die wichtigsten Spezialfälle von Krattenthalers q-Lagrangeformel sind:

(1) $\varphi_n(z) = (1 - az)(1 - qaz)\cdots(1 - q^{n-1}az)$, $\psi_n \equiv 1$.
Das ist wieder Carlitz's Beispiel (6.1). Wegen $\varphi_n'(z) = -[n]\varphi_n(z)\frac{a}{1-az}$ folgt aus (7.12) und (7.13) sofort (6.2).

Betrachtet man eine zu (5.1) analoge Entwicklung, erhält man als Koeffizienten die q-Laguerrepolynome (siehe [6, 14]). Außerdem liefert es folgendes q-Analogon der inversen Relation (Kap. 4, Bsp. 1):

$$\alpha_{nk} = \begin{bmatrix} n+p \\ n+k \end{bmatrix}, \qquad \beta_{nk} = (-1)^{n-k} q^{\binom{n-k}{2}} \begin{bmatrix} n+p \\ n-k \end{bmatrix}.$$

(2) $\varphi_n(z) = e(a[n]z)$, $\psi_n \equiv 1$ (Jackson [22], Cigler [7]).
Damit läßt sich analog zu (Kap. 1, Bsp. 2) Jacksons q-Analogon der Abelidentität herleiten, es liefert die „richtigen“ q-Analoga der Abelpolynome [7] und der inversen Relationen von Abeltyp, z.B.

$$\alpha_{nk} = (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} [n+p]^{n-k}, \qquad \beta_{nk} = q^{\binom{n-k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} [n+p][k+p]^{n-k-1}.$$

(3) $\varphi(z) = (1-az)(1-qaz)\cdots(1-q^{n-1}az)$, $\psi_n(z) = (1-z/q)(1-z/q^2)\cdots(1-z/q^n)$.
Dieses Beispiel hängt eng mit den q-Jacobi- und q-Gegenbauerpolynomen zusammen. Gessel und Stanton [18] wenden es auf Transformationen hypergeometrischer Reihen an. Krattenthaler [25, 26] konnte damit überzeugende q-Analoga der inversen Relationen von Legendre- und Chebyshevtyp herleiten, etwa (vergleiche Kap. 4, Bsp. 3).

$$a_n = \sum_k \begin{bmatrix} n+p \\ k \end{bmatrix} b_{n-2k} \quad \Leftrightarrow \quad b_n = \sum_k (-1)^k q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n+p-k \\ k \end{bmatrix} \frac{[n+p]}{[n+p-k]} a_{n-2k}.$$

Schließlich führt es — ausgehend von (2.5) — zu einem q-Analogon der Catalanzahlen (siehe Kap. 8).

Das q-Analogon von Gessel–Stanton. In [18] geben Gessel und Stanton ein q-Analogon der Lagrangeformel für den Spezialfall $g(x) = x(1+x)^{-b-1}$ an, das außer in Spezialfällen anscheinend nicht in Krattenthalers Ansatz (7.11) enthalten ist. Im Wesentlichen bringen sie ein q-Analogon der inversen Relation von Gouldtyp (Kap. 4. Bsp. 2). Sie betrachten (in etwas anderer Notation): $g_k(x) = \sum_n \alpha_{nk} x^n$ mit

$$\alpha_{nk} = q^{-b(n-k)k} \frac{[a+bk-k]^{(n-k)}}{[n-k]_b!}. \tag{7.16}$$

Dabei sei $[a]^{(n)} = [a][a+1]\cdots[a+n-1]$,

$$[a]_b = \frac{q^{ab}-1}{q^b-1} = \frac{[ab]}{[b]}.$$

Man rechnet leicht nach, daß

$$g_k(x)(1-q^{-kb}[b]\,x) = q^{-kb} g_k(q^b x) - xq^a\,[b]\,g_k(qx)$$

gilt, was wieder als Eigenwertgleichung

$$g_k(q^b x) + [b]\,x\; g_k(x) = q^{bk}(g_k(x) + xq^a\,[b]\,g_k(qx)) \tag{7.17}$$

geschrieben werden kann.

$$\Rightarrow \tilde{g}_n(q^{-b}x) + [b]\,x\tilde{g}_n(x) = q^{bn}\left(\tilde{g}_n(x) + \frac{x}{q} q^a\,[b]\,\tilde{g}_n\left(\frac{x}{q}\right)\right).$$

Setzt man $\tilde{g}_n(x) = \sum_{k\le n} \gamma_{nk} x^{-k}$, erhält man durch Koeffizientenvergleich

$$q^{bk}\gamma_{nk} + [b]\,\gamma_{n,k+1} = q^{bn}(\gamma_{nk} + q^{a-1}\,[b]\,q^{k+1}\gamma_{n,k+1})$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma_{nk}}{\gamma_{n,k+1}} = [b]\frac{q^{a+bn+k}-1}{q^{bk}-q^{bn}} = -q^{-kb}\frac{[a+bn+k]}{[n-k]_b}$$

$$\Rightarrow \gamma_{nk} = \gamma_{nn}\ q^{b\binom{k}{2}-b\binom{n}{2}} \frac{[a+bn+k]^{(n-k)}}{[n-k]_b!}(-1)^{n-k}.$$

Schließlich ist

$$G_n(x) = \tilde{g}_n(x) + xq^{a-1}\,[b]\,\tilde{g}_n(x/q).$$

Setzt man $G_n(x) = \sum\limits_{k\le n} \beta_{nk} x^{-k}$, so ist (β_{nk}) wegen

$$\delta_{nk} = Lg_k(x)G_n(x) = L\sum_{j,i} \alpha_{jk}x^j\beta_{ni}x^{-i} = \sum_i \beta_{ni}\alpha_{ik}$$

genau die zu (α_{nk}) inverse Matrix.

Man erhält

$$\begin{aligned} \beta_{nk} &= \gamma_{nk} + q^{a+k}\,[b]\,\gamma_{n,k+1} \\ &= q^{b\binom{k}{2}-b\binom{n}{2}}(-1)^{n-k}\frac{[a+bn+k+1]^{(n-k-1)}}{[n-k]_b!} \\ &\qquad \times \left([a+bn+k] - [n-k]_b\,[b]\,q^{a+k+bk}\right) \\ &= \frac{[a+bn+k+1]^{(n-k-1)}[a+bk+k]}{[n-k]_b!} q^{b\binom{k}{2}-b\binom{n}{2}}(-1)^{n-k}. \end{aligned} \tag{7.18}$$

Wir haben somit zwei zueinander inverse Relationen (7.16) und (7.18). Man kann das Ergebnis aber auch als Lagrangeformel für die $g_k(x) = \sum\limits_n \alpha_{nk}x^n$ auffassen: Für den Koeffizienten c_n in der Entwicklung (7.1) einer Funktion $f(x) = \sum\limits_k f_k x^k$ gilt

$$c_n = Lf(x)G_n(x) = \sum_k \beta_{nk} f_k.$$

8. **q-Catalanzahlen.** Ausgehend von den Entwicklungen (2.5) und (2.6) für die Catalanzahlen, wollen wir jetzt zwei verschiedene q-Analoga der Catalanzahlen studieren, die den beiden q-Lagrangeformeln von Garsia und Krattenthaler entsprechen.

Carlitz's q-Catalanzahlen. Wir definieren analog zu (2.6) q-Catalanzahlen $C_n = C_n(q)$ durch (siehe [1]):

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1} z^n (1-z)(1-qz)\cdots(1-q^{n-1}z). \tag{8.1}$$

Aus (6.4) beziehungsweise dessen Beweis folgt dann

$$z^2 = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k+l=n} C_{k-1}C_{l-1}q^{k(l-1)}\right) z^n(1-z)\cdots(1-q^{n-1}z).$$

Andererseits folgt aus (8.1)

$$z = C_0 z(1-z) + \sum_{n=2}^{\infty} C_{n-1}\, z^n (1-z)\cdots(1-q^{n-1}z),$$

$C_0 = 1$ und eine andere Entwicklung von z^2, sodaß man durch Koeffizientenvergleich

$$C_{n-1} = \sum_{k+l=n-2} C_k C_l\, q^{(k+1)l}$$

oder

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}\, q^{(k+1)(n-k)} \tag{8.2}$$

erhält. Mit $C_n = q^{\binom{n}{2}} \tilde{C}_n$ wird das zu

$$\tilde{C}_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} q^{-k} \tilde{C}_k \tilde{C}_{n-k}.$$

Diese q-Catalanzahlen erfüllen im Wesentlichen also das einfachste q-Analogon der klassischen Rekursion (2.1) der Catalanzahlen. Für die ersten Werte erhält man:

$C_0 = C_1 = 1,\ C_2 = 1+q,\ C_3 = 1+q+2q^2+q^3,\ C_4 = 1+q+2q^2+3q^3+3q^4+3q^5+q^6,\ \ldots$

Das Analogon von (2.5) führt, wie man sich leicht überlegt, zu denselben q-Catalanzahlen:

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} q^{\binom{n-1}{2}} C_n \frac{z^n}{(1+z)(1+qz)\cdots(1+q^{2n-1}z)}. \tag{8.3}$$

Eine explizite Formel für die C_n ist allerdings nicht bekannt. Dafür gibt es noch eine schöne kombinatorische Interpretation: Sei $\mathcal{C}_n$ die Menge aller Wörter mit n Nullen und n Einsern, wo jeder Anfangsabschnitt mindestens so viele 0 wie 1 enthält. Diesen Wörtern entsprechen Wege von $(0,0)$ nach $(2n,0)$, die nicht unter die x-Achse gehen, wenn man jeder 0 ein ansteigendes, jeder 1 ein absteigendes Wegstück zuordnet. Bekanntlich ist $|\mathcal{C}_n| = C_n$. Für das q-Analogon gilt jetzt:

$$C_n = \sum_{w \in \mathcal{C}_n} q^{\operatorname{inv} w}. \tag{8.4}$$

Zum Beweis zerlegt man ein Wort $w \in \mathcal{C}_{n+1}$ in der üblichen Weise in

$$w = 0 w_1 1 w_2 \text{ mit } w_1 \in \mathcal{C}_k, w_2 \in \mathcal{C}_{n-k}.$$

Für die Anzahl der Inversionen von w gilt dann

$$\operatorname{inv} w = \operatorname{inv} w_1 + \operatorname{inv} w_2 + (k+1)(n-k).$$

Daher erfüllt $\sum_{w \in \mathcal{C}_n} q^{\operatorname{inv} w}$ dieselbe Rekursion (8.2) wie die C_n.

Die q-Catalanzahlen $c_n(\lambda)$. Der 3. Spezialfall von Krattenthalers q-Analogon der Lagrangeformel legt es nahe, die Entwicklung (2.5) auch auf folgende Weise zu verallgemeinern:

$$z = \sum_n \frac{c_n(\lambda)}{q^{\binom{n}{2}}} \frac{z^n}{(1+z/q^n)\cdots(1+z/q)(1+q^\lambda z)\cdots(1+q^{\lambda+n-1}z)}. \tag{8.5}$$

Aus (7.12) folgt dann

$$\begin{aligned} q^{-\binom{n}{2}} c_n(\lambda) &= \frac{1}{[n]}(1+z/q^{n-1})\cdots(1+z)(1+q^\lambda z)\cdots(1+q^{\lambda+n-1}z)\big|_{z^{n-1}} \\ &= \frac{1}{[n]}\sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{k}{2}}(q^{-n+1}z)^k \sum_l \begin{bmatrix} n \\ l \end{bmatrix} q^{\binom{l}{2}}(q^\lambda z)^l\big|_{z^{n-1}} \\ &= \frac{1}{[n]}\sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{k}{2}-k(n-1)+\lambda(n-1-k)+\binom{n-1-k}{2}} \binom{n}{n-1-k}, \end{aligned} \tag{8.6}$$

und schließlich

$$c_n(\lambda) = \frac{1}{[n]}\sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} q^{k^2+\lambda k}. \tag{8.7}$$

Die Summanden sind q-Analoga der *Runyonzahlen* $r_{nk} = \frac{1}{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k+1}$ aus [31, p. 17], sie zählen die Wege von (0,0) bis (2n,0) über der x-Achse mit k „Tälern".

Für gewisse λ läßt sich (8.6) einfacher berechnen: Für $\lambda = 1$ etwa gilt

$$\begin{aligned} c_n(1) &= q^{\binom{n}{2}} \frac{1}{[n]}(1+z/q^{n-1})\cdots(1+q^n z)\big|_{z^{n-1}} \\ &= q^{\binom{n}{2}} \frac{1}{[n]} \begin{bmatrix} 2n \\ n-1 \end{bmatrix} q^{(-n+1)(n-1)+\binom{n-1}{2}} \\ &= \frac{1}{[n+1]} \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{8.8}$$

also das naheliegendste q-Analogon der Catalanzahlen überhaupt. Für $\lambda = 0$ erhält man auf ähnliche Weise

$$c_n(0) = \frac{1}{[n+1]} \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix} \frac{1+q}{1+q^n}. \tag{8.9}$$

Für die ersten Werte gilt

$$c_0(\lambda) = c_1(\lambda) = 1,\ c_2(\lambda) = 1 + q^{1+\lambda},\ c_3(\lambda) = 1 + [3]q^{1+\lambda} + q^{4+2\lambda},\ \ldots$$

Nun zur kombinatorischen Interpretation. Es gilt:

$$c_n(\lambda) = \sum_{w\in\mathcal{C}_n} = q^{\operatorname{maj} w + (\lambda-1)\operatorname{des} w}. \tag{8.10}$$

Dabei bezeichnet $\operatorname{maj} w$ den *major* (oder *greater*) *index* von w und des w die Anzahl der Abstiege $(= \dots 10 \dots)$ in w.

Für den Fall $\lambda = 1$ hat J. Fürlinger den folgenden eleganten Beweis gefunden:

Betrachten wir alle Wege von $(0,0)$ nach $(2n,0)$ kodiert durch 0–1-Wörter w, so gilt bekanntlich (siehe etwa [29]):

$$\sum_w q^{\operatorname{maj} w} = \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}.$$

Wir ordnen jetzt jedem Weg w, der unter die x-Achse geht, bijektiv einen Weg w' von $(0,0)$ nach $(2n,2)$ zu: Dazu bestimmen wir den Punkt P auf dem Weg, der am „tiefsten“ liegt, und falls es mehrere solche gleichtiefe gibt, dann den ersten davon. P' sei der Punkt vor P. Indem wir das unmittelbar vor P gelegene absteigende Wegstück $P'P$ in ein aufsteigendes hinaufklappen und den Rest des Weges (um zwei Einheiten nach oben verschoben) daran anhängen, erhalten wir den Weg w'. Aus w' kann man w wieder zurückgewinnen: Der kritische Punkt P', an dem das darauffolgende Wegstück wieder hinuntergeklappt werden muß, ist der am weitesten rechts liegende unter den „tiefsten“ Punkten von w'. Offensichtlich ist $\operatorname{maj} w' = \operatorname{maj} w - 1$. Daher gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{w \in \mathcal{C}_n} q^{\operatorname{maj} w} &= \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix} - \sum_{w \notin \mathcal{C}_n} q^{\operatorname{maj} w} = \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix} - q \sum_{w'} q^{\operatorname{maj} w'} \\ &= \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix} - q \begin{bmatrix} 2n \\ n-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{[n+1]} \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Für den allgemeinen Fall (λ beliebig) und weitere Eigenschaften der q-Catalanzahlen verweise ich auf [11].

9. Abschließende Bemerkungen. Wie aus dem Unmfang des Skriptums ersichtlich, erweist sich das Thema „Lagrange-Inversion“ als unerwartet ergiebig. Die Stoffauswahl ist natürlich sehr subjektiv, die kombinatorische Seite wurde zu Gunsten der analytischen vernachlässigt, die q-Analoga sind sicher nicht zu kurz gekommen. Auf einige wesentliche Aspekte, etwa kombinatorische Beweise, wurde überhaupt nicht eingegangen. Ich verweise hier auf die Literatur, z.B. [4, 27, 30, 34].

Als Quelle habe ich neben der zitierten Literatur in erster Linie eine Vorlesung über „Kombinatorische Identitäten“ benutzt, die Prof. Cigler im WS 1981/82 gehalten hat. Ich hoffe, die Darstellung dadurch insofern bereichert zu haben, daß sie für jeden den einen oder anderen neuen Aspekt enthält.

Literatur

[1] G.E. ANDREWS, *Identities in combinatories II: A q-analog of the Lagrange inversion theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **53** (1975), 240–245.

[2] G. BARON und P. KIRSCHENHOFER, *Operatorenkalkül über freien Monoiden III: Lagrange-inversion und Sheffersysteme*, Monatsh. Math. **92** (1981), 83–103.

[3] L. CARITZ, *Some q-expansion formulas*, Glasnik Mat. **8** (1973), 205–214.

[4] L CHOTTIN, *Énumération d'arbres et formules d'inversion de séries formelles*, J. Combin. Theory Ser. B **31** (1981), 23–45.

[5] J. CIGLER, *Sequences of polynomials of binomial type and the Lagrange–Good formula*, Univ. Wien, 1977.

[6] J. CIGLER, *Operatormethoden für q-Identitäten II: q-Laguerre-Polynome*, Monatsh. Math. **91** (1981), 105–117.

[7] J. CIGLER, *Operatormethoden für q-Identitäten III: Umbrale Inversionen und die Lagrange'sche Formel*, Arch. Math. **35** (1980), 533–543.

[8] J. CIGLER, *Elementare q-Identitäten*, Actes de la 5ème session du Séminaire Lotharingien de Combinatoire, publication de l'I.R.M.A. no 182/S–04, Strasbourg, 1982, pp. 23–58.

[9] L. COMTET, *Advanced Combinatorics*, D. Reidel, Dordrecht, Holland, 1974.

[10] G. P. EGORITSCHEW, *Integral representation and the computation of combinatorial sums*, "Nauka" Sibirsk. Otdel., Novosibirsk, 1977, translated from the Russian: Translations of Mathematical Monographs, 59, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1984.

[11] J. FÜRLINGER and J. HOFBAUER, *q-Catalan numbers*, J. Combin. Theory Ser. A **40** (1985), 248—264.

[12] A. M. GARSIA, *A q-analogue of the Lagrange inversion formula,*, Houston J. Math. **7** (1981), 205–237.

[13] A. M. GARSIA and S. A. JONI, *A new expression for umbral operators and power series inversion*, Proc. Amer. Math. Soc. **64** (1977), 179–185.

[14] A. M. GARSIA and S. A. JONI, *Composition sequences*, Comm. Algebra **8** (1980), 1195–1266.

[15] I. M. GESSEL, *A factorization for formal Laurent series and lattice path enumeration*, J. Combin. Theory Ser. A **28** (1980), 321–337.

[16] I. GESSEL, *A noncommutative generalization and a q-analog of the Lagrange inversion formula*, Trans. Amer. Math. Soc. **257** (1980), 455–482.

[17] I. GESSEL and D. STANTON, *Strange evaluations of hypergeometric series*, SIAM J. Math. Anal. **13** (1982), 295–308.

[18] I. GESSEL and D. STANTON, *Application of q-Lagrange inversion to basic hypergeometric series*, Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983), 173–203.

[19] I. J. GOOD, *Generalization to several variables of Lagrange's expansion, with application to stochastic processes*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **56** (1960), 367–380.

[20] J. HOFBAUER, *A short proof of the Lagrange–Good formula*, Discrete Math. **25** (1979), 135–139.

[21] J. HOFBAUER, *A q-analog of the Lagrange expansion*, Arch. Math. **42** (1984), 536–544.

[22] F. H. JACKSON, *A q-generalization of Abel's series*, Rendiconti Palermo **29** (1910), 340–346.

[23] C. JACOBI, *De resolutione aequationum per series infinitas*, J. Reine Angew. Math. **6** (1830), 257–286.

[24] S. A. JONI, *Lagrange inversion in higher dimensions and umbral operators*, Linear and Multilinear Algebra **6** (1978), 111–122.

[25] Ch. KRATTENTHALER, *A new q-Lagrange formula and some applications*, Proc. Amer. Math. Soc. **90** (1984), 338–344.

[26] Ch. Krattenthaler, *Lagrangeformel und inverse Relationen*, Ph. Doct. Thesis, University of Vienna, 1983.

[27] G. LABELLE, *Une nouvelle demonstration combinatoire des formules inversion de Lagrange*, Advances in Math. **42** (1981), 217–247.

[28] J. L. LAGRANGE, *Nouvelles méthodes pour résoudre les équations littérales par le moyens de séries*, (1770) Oeuvres, vol. 3, Gauthier–Villars, Paris, 1869, pp. 1–73.

[29] P. A. MAC MAHON, *Collected Papers: Combinatorics*, Vol. I, MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

[30] G. N. RANEY, *Functional composition patterns and power series reversion*, Trans. Amer. Math. Soc. **94** (1960), 441–451.

[31] J. RIORDAN, *J. Wiley*, New York, 1968.

[32] St. ROMAN and G. C. ROTA, *The umbral calculus*, Advances in Math. **27** (1978), 95–188.

[33] G. C. ROTA, D. KAHANER and A. ODLYZKO, *Finite operator calculus*, J. Math. Anal. Appl. **42** (1973), 685–760.

[34] W. T. TUTTE, *On elementary calculus and the Good formula*, J. Combin. Theory Ser. B **18** (1975), 97–137.