Monatshefte für Mathematik 78, 117—130 (1974)

Zum Tensorprodukt von Funktoren auf Kategorien von Banachräumen[1]

Von

Peter Michor, Wien

(Eingegangen am 2. Oktober 1972)

1. Einleitung, Definitionen und Notationen

Dieser Artikel schließt an die Arbeit von Cigler an und verbindet sie mit den Ergebnissen von Levin. Zunächst behandeln wir Funktoren vom Typ Σ und dehnen die Ergebnisse von Levin auch auf kontravariante Funktoren aus, dann beschreiben wir das Tensorprodukt von Funktoren vom Typ Σ. Das Tensorprodukt von beliebigen Funktoren stellen wir als induktiven Limes dar und leiten daraus verschiedene Sätze über die Darstellung von Funktoren durch Limiten her.

Wir verwenden folgende Notation:

$\underline{B}$ ist die Kategorie aller Banachräume, Morphismen sind stetige lineare Abbildungen, $\underline{K}$ eine volle Teilkategorie davon, die immer dann den eindimensionalen Raum I ($= R$ oder C, aber nur eines von beiden) enthält, wenn von Funktoren vom Typ Σ die Rede ist.

$\underline{B}_1$ ist die (nicht volle) Teilkategorie von $\underline{B}$, die als Morphismen nur Kontraktionen besitzt, $\underline{K}_1$ desgleichen.

$H(X, Y)$ ist der Banachraum aller stetigen linearen Abbildungen von X in Y. $X \hat{\otimes} Y$ ist das projektive Tensorprodukt, die Vervollständigung von $X \otimes Y$ in der größten „Crossnorm" γ; $X \hat{\hat{\otimes}} Y$ ist das induktive Tensorprodukt mit der kleinsten Crossnorm λ (vgl. Levin); Funktoren $\underline{K} \to \underline{B}$ sind immer zulässig oder stark, das heißt, sie sind linear und Kontraktionen als Abbildungen zwischen den Morphismenräumen. Resultate von Mitjagin—Shvarts werden ohne weitere Bemerkung verwendet.

---

[1] Diese Arbeit ist Teil der Dissertation, die der Autor unter der Anleitung von Professor Cigler an der Universität Wien verfaßte.

2. Funktoren vom Typ Σ

Folgende Resultate stammen von LEVIN: Sei $F:\underline{K}\to\underline{B}$ $(I\in\underline{K})$ ein kovarianter Funktor. Dann ist für jedes $X\in\underline{K}$ die lineare Abbildung $i_X^F:F(I)\otimes X\to F(X)$, $i_X^F(a\otimes x)=F(\hat{x})a$ injektiv, wobei $\hat{x}:I\to X$ die lineare Abbildung ist, die durch $\hat{x}(1)=x$ festgelegt ist.

Wenn der Bildraum von i_X^F für jedes $X\in\underline{K}$ dicht in $F(X)$ ist, heißt Π vom Typ Σ und für einen Funktor F vom Typ Σ gilt:

Für jedes $X\in\underline{K}$ ist $F(X)$ isometrisch isomorph (vermittels i_X^F) zu $F(I)\bar{\otimes}_{\alpha_X}X$, der Vervollständigung von $F(I)\otimes X$ in einer Crossnorm α_X. Für jedes $f:X\to Y$ in $\underline{K}$ ist $F(f)=1_{F(I)}\otimes f$ und für jeden kovarianten Funktor $R:\underline{K}\to\underline{B}$ und jede natürliche Transformation $\eta:F\to R$ ist $\eta_X=\eta_I\otimes 1_X$ für alle $X\in\underline{K}$.

Wenn man die Beweise von LEVIN auf den kontravarianten Fall überträgt, erhält man: Sei $G:\underline{K}\to\underline{B}$ $(I\in\underline{K})$ ein kontravarianter Funktor. Für jedes $X\in\underline{K}$ ist dann die lineare Abbildung $i_X^G: G(I)\otimes X'\to G(X)$, $i_X^G(a\otimes x')=G(x')a$ injektiv, wobei x' als Abbildung $X\to I$ betrachtet wird. Wenn für jedes $X\in\underline{K}$ $i_X^G(G(I)\otimes X')$ in $G(X)$ dicht ist, heiße G ein kontravarianter Funktor vom Typ Σ. Für einen solchen Funktor G gilt:

Für jedes $X\in\underline{K}$ ist $G(X)$ isometrisch isomorph zu $G(I)\bar{\otimes}_{\beta_X}X'$, der Vervollständigung von $G(I)\otimes X'$ in einer Crossnorm β_X; für jedes $f:X\to Y$ in $\underline{K}$ ist $G(f)=1_{G(I)}\otimes f'$ und für jede natürliche Transformation φ von G in einen kontravarianten Funktor $S:\underline{K}\to\underline{B}$ gilt $\varphi_X=\varphi_I\otimes 1_X$, für alle $X\in\underline{K}$. Aus der letzten Aussage folgt, daß $n.t.H(G,S)=n.t.H(G,S_e)$ gilt, wobei S_e der wesentliche Teilfunktor von S ist ($S_e(X)$ ist der Abschluß von $i_X^S(S(I)\otimes X)$ in $S(X)$).

3. Das Tensorprodukt von Funktoren vom Typ Σ

Seien $G,F:\underline{K}\to\underline{B}$ Funktoren vom Typ Σ, G kontra- und F kovariant.

Das Tensorprodukt $G\underset{\underline{K}}{\hat{\otimes}}F$ ist definiert als $\left(\sum_{X\in\underline{K}}G(X)\hat{\otimes}F(X)\right)/N$, wobei Σ das Coprodukt in $\underline{B}_1$ ist und N der abgeschlossene Teilraum davon, der von allen Elementen der Gestalt

$$\sum_i G(\varphi)g_Y^i\otimes f_X^i-\sum_i g_Y^i\otimes F(\varphi)f_X^i,\ \varphi:X\to Y \qquad (*)$$

und $\sum_i g_Y^i\otimes f_X^i\in G(Y)\otimes F(X)$, $X,\ Y\in\underline{K}$, erzeugt wird.

Lemma: *Für jedes* $X \in \underline{K}$ *ist die Abbildung*
$\pi_X : G(I) \otimes X' \otimes F(I) \otimes X \to G(X) \hat{\otimes} F(X), \pi_X (\sum_i a_i \otimes \xi_i \otimes b_i \otimes \eta_i) =$
$= \sum_i G(\xi_i) a_i \otimes F(\hat{\eta}_i) b_i$, *also* $\pi_X = i_X^G \otimes i_X^F$, *injektiv und hat dichtes Bild.*

Beweis: Zunächst zeigen wir: hat dichtes Bild.
Sei $u \in G(X) \hat{\otimes} F(X)$ und $\varepsilon > 0$ gegeben.

Es existiert $v \in G(X) \otimes F(X)$, $v = \sum_{k=1}^{n} g_k \otimes f_k$, so daß
$\|u - v\|_{G(X) \hat{\otimes} F(X)} \leqslant \varepsilon/2$.

Für jedes g_k existiert $\sum_{i=1}^{m_k} a_i^k \otimes \xi_i^k \in G(I) \otimes X'$ mit

$$\|g_k - \sum_{i=1}^{m_k} G(\xi_i^k) a_i^k\|_{G(X)} \leqslant \frac{\varepsilon}{4n \|f_k\|_{F(X)}} .$$

Für jedes f_k existiert $\sum_{j=1}^{r_k} b_j^k \otimes \eta_j^k \in F(I) \otimes X$ mit

$$\|f_k - \sum_{j=1}^{r_k} F(\hat{\eta}_j^k) b_j^k\|_{F(X)} \leqslant \frac{\varepsilon}{4n \|\sum_{i=1}^{m} G(\xi_i^k) a_k\|_{G(X)}} .$$

Damit gilt für $w \in G(I) \otimes X' \otimes F(I) \otimes X$,

$$w = \sum_{k=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m_k} a_i^k \otimes \xi_i^k) \otimes (\sum_{j=1}^{r_k} b_j^k \otimes \eta_j^k) :$$

$$\|v - \pi_X(w)\|_{G(X) \hat{\otimes} F(X)} =$$

$$= \|\sum_{k=1}^{n} g_k \otimes f_k - \sum_{k=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m_k} G(\xi_i^k) a_i^k) \otimes (\sum_{j=1}^{r_k} F(\hat{\eta}_j^k) b_j^k)\|_{G(X) \hat{\otimes} F(X)} \leqslant$$

$$\leqslant \|\sum_{k=1}^{n} g_k \otimes f_k - \sum_{k=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m_k} G(\xi_i^k) a_i^k) \otimes f_k\|_{G(X) \hat{\otimes} F(X)} +$$

$$+ \|\sum_{k=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m_k} G(\xi_i^k) a_i^k) \otimes f_k - \sum_{k=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m_k} G(\xi_i^k) a_i^k) \otimes (\sum_{j=1}^{r_k} F(\hat{\eta}_j^k) b_j^k)\|_{G(X) \hat{\otimes} F(X)} =$$

$$= \|\sum_{k=1}^{n} (g_k - \sum_{i=1}^{m_k} G(\xi_i^k) a_i^k) \otimes f_k\|_{G(X) \hat{\otimes} F(X)} +$$

$$+ \|\sum_{k=1}^{n} [\sum_{i=1}^{m_k} G(\xi_i^k) a_i^k] \otimes [f_k - \sum_{j=1}^{r_k} F(\hat{\eta}_j^k) b_j^k]\|_{G(X) \hat{\otimes} F(X)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \|g_k - \sum_{k=1}^{m_k} G(\xi_i^k)\, a_i^k\|_{G(X)} \|f_k\|_{F(X)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \|\sum_{i=1}^{m_k} G(\xi_i^k)\, a_i^k\|_{G(X)} \|f_k - \sum_{j=1}^{r_k} F(\hat{\eta}_j^k)\, b_j^k\|_{F(X)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_{F(X)} \frac{\varepsilon}{4n\|f_k\|} + \sum_{k=1}^{n} \|\sum_{i=1}^{m_k} G(\xi_i^k)\, a_i^k\|_{G(X)} \frac{\varepsilon}{4n\|\sum_{i=1}^{m_k} G(\xi_i^k)\, a_i^k\|} =$$

$$= \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2\,.$$

Insgesamt erhalten wir:

$$\|u - \pi_X(w)\|_{G(X)\hat{\otimes} F(X)} \leqslant \|u - v\| + \|v - \pi_X(w)\| \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\,,$$

also hat π_X dichtes Bild in $G(X)\hat{\otimes} F(X)$.

Jetzt zeigen wir, daß π_X injektiv ist.

Angenommen, es existiert ein $w = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes \xi_i \otimes b_i \otimes \eta_i \in G(I) \otimes X' \otimes \otimes F(I) \otimes X$ mit $\pi_X(w) = 0$, aber $w \neq 0$. Die Darstellung sei so gewählt, daß (a_i) und (b_i) linear unabhängig sind.

Sei $x \in X$; $\hat{x} : I \to X$, $G(\hat{x}) : G(X) \to G(I)$.

Sei $x' \in X'$; $x' : X \to I$, $F(x') : F(X) \to F(I)$.

Für alle $x \in X$ und $x' \in X'$ ist

$$G(\hat{x}) \otimes F(x') : G(X) \hat{\otimes} F(X) \to G(I) \hat{\otimes} F(I)$$

linear und durch $\|x\|\,\|x'\|$ beschränkt.

Daher gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \big(G(\hat{x}) \otimes F(x')\big)\pi_X(w) = \\ &= \big(G(\hat{x}) \otimes F(x')\big)\big(\sum_i G(\xi_i)\, a_i \otimes F(\hat{\eta}_i)\, b_i\big) = \\ &= \sum_i G(\xi_i \circ \hat{x})\, a_i \otimes F(x' \circ \hat{\eta}_i)\, b_i = \\ &= \sum_i \langle x, \xi_i \rangle \langle \eta_i, x' \rangle\, a_i \otimes b_i \quad \text{wie in 1.} \end{aligned}$$

Weil (a_i) $l.u.$ und (b_i) $l.u.$ sind, ist auch $(a_i \otimes b_i)$ $l.u.$, also ist $\langle x, \xi_i \rangle \langle \eta_i, x' \rangle = 0$ für alle $x \in X$ und $x' \in X'$; daraus folgt:
$\xi_i = 0$ oder $\eta_i = 0$ für alle i, also $w = 0$, im Widerspruch zur Annahme. qued.

Für jedes $X \in \underline{K}$ ist also $G(I) \otimes X' \otimes F(I) \otimes X$ ein dichter Teilraum von $G(X) \hat{\otimes} F(X)$, also ist die algebraische direkte Summe $\sum_{X \in \underline{K}}^{a} G(I) \otimes X' \otimes F(I) \otimes X$ (nur endlich viele Koordinaten $\neq 0$) dichter Teilraum von $\sum_{X \in \underline{K}} G(X) \hat{\otimes} F(X)$; denn sei $u \in \sum_{X \in \underline{K}} G(X) \hat{\otimes} F(X)$, dann ist u an höchstens abzählbar vielen Koordinaten $X \in \underline{K} \neq 0$ in $G(X) \hat{\otimes} F(X)$. Dort kann man aber bei entsprechender Numerierung n der Koordinaten bis auf $\varepsilon/4n^2$ an die Koordinate von u heran, also in der Summe bis auf $\sum_{n=1}^{N} \varepsilon/4n^2 < \varepsilon/2$, wenn man mit N so groß wird, daß die Norm über den Rest von $u \leqslant \varepsilon/2$ wird.

$G \hat{\otimes}_{\underline{K}} F = (\sum_{X \in \underline{K}} G(X) \hat{\otimes} F(X))/N$. Wir wollen nachschauen, wie

$$\pi(M) = N \cap \sum_{X \in \underline{K}}^{a} \pi_X \big(G(I) \otimes X' \otimes F(I) \otimes X\big) \text{ aussieht:}$$

$\pi(M)$ wird erzeugt von allen Elementen der Form (*), wobei aber

$$\sum_k g_Y^k \otimes f_X^k \in i_Y^G \big(G(I) \otimes X'\big) \otimes i_X^F \big(F(I) \otimes X\big)$$

ist und $\varphi: X \to P$ alle $\underline{K}$-Morphismen durchläuft. Sei also

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes \xi_i^Y \otimes b_i \otimes \eta_i^X \in G(I) \otimes Y' \otimes F(I) \otimes X$$

und $\varphi: X \to Y$ beliebig. Dann wird $\pi(M)$ aufgespannt durch Elemente der Gestalt:

$$\sum_{i=1}^{n} G(\varphi)\, G(\xi_i^Y)\, a_i \otimes F(\hat{\eta}_i^X)\, b_i - \sum_i G(\xi_i^Y)\, a_i \otimes F(\varphi)\, F(\hat{\eta}_i^X)\, b_i =$$

$$= \sum_i G(\xi_i^Y \circ \varphi)\, a_i \otimes F(\hat{\eta}_i^X)\, b_i - \sum_i G(\xi_i^Y)\, a_i \otimes F(\varphi \circ \hat{\eta}_i^X)\, b_i =$$

$$= \sum_i G\big(\varphi'(\xi_i^Y)\big)\, a_i \otimes F(\hat{\eta}_i^X)\, b_i - \sum_i G(\xi_i^Y)\, a_i \otimes F\big(\widehat{\varphi(\eta_i^X)}\big)\, b_i .$$

M selbst wird daher in $\sum_{X \in \underline{K}}^{a} G(I) \otimes X' \otimes F(I) \otimes X$ erzeugt durch Elemente der Form

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes \varphi'(\xi_i^Y) \otimes b_i \otimes \eta_i^X - \sum_i a_i \otimes \xi_i^Y \otimes b_i \otimes \varphi(\eta_i^X) .$$

Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\Pi_X = 1_{G(I)} \otimes 1_{F(I)} \otimes Tr_X$$

$$\Pi_X : G(I) \otimes X' \otimes F(I) \otimes X \to G(I) \otimes F(I)$$

$$\Pi_X (a \otimes \xi \otimes b \otimes \eta) = \langle \eta, \xi \rangle\, a \otimes b$$

und dazu die Summenabbildung

$$\Pi = \sum_{X \in \underline{K}}^{a} \Pi_X : \sum_{X \in \underline{K}}^{a} G(I) \otimes X' \otimes F(I) \otimes X \to G(I) \otimes F(I).$$

Lemma: $\ker \Pi = M$ *und* Π *ist surjektiv.*

Beweis: $M \subseteq \ker \Pi$:

$$\Pi\big(\sum_i a \otimes \varphi'(\xi_i^Y) \otimes b_i \otimes \eta_i^X - \sum_i a_i \otimes \xi_i^Y \otimes b_i \otimes \varphi(\eta_i^X)\big) =$$
$$= \sum_i \langle \eta_i^X, \varphi'(\eta_i^Y)\rangle a_i \otimes b_i - \sum_i \langle \varphi(\eta_i^X), \xi_i^Y\rangle a_i \otimes b_i = 0.$$

$\ker \Pi \subseteq M$:

Sei $w = \big((\sum_{i=1}^{n_X} a_i^X \otimes \xi_i^X \otimes b_i^X \otimes \eta_i^X)_{X \in \underline{K}}\big) \in \sum_{X \in \underline{K}}^{a} G(I) \otimes X' \otimes F(I) \otimes X$.

Dann sind nur für endlich viele $X \in \underline{K}$ die Koordinaten von w von Null verschieden, z. B. für $X_1, \ldots, X_N$. Wir schreiben

$$w = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n_j} a_i^j \otimes \xi_i^j \otimes b_i^j \otimes \eta_i^j, \text{ wobei } \sum_{i=1}^{n_j} a_i^j \otimes \xi_i^j \otimes b_i^j \otimes \eta_i^j$$

das Element von $\sum_{X \in \underline{K}}^{a} G(I) \otimes X' \otimes F(I) \otimes X$ darstellen soll, das an den Koordinaten $X \neq X_j$ immer 0 ist.

Sei w noch $\in \ker \Pi$, also

$$\Pi(w) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} \langle \eta_i^j, \xi_i^j\rangle a_i^j \otimes b_i^j = 0 \quad \text{in } G(I) \otimes F(I).$$

Für $x \in X$ ist $\hat{x}: I \to X$, $(\hat{x})': X' \to I$, und zwar ist $(\hat{x})'(x') = \langle x, x'\rangle$ für $x' \in X'$. Wir nehmen noch den algebraischen Isomorphismus $\sum_{j=1}^{N} G(I) \otimes X_j' \otimes F(I) \otimes X = G(I) \otimes F(I) \otimes (\sum_j X_j' \otimes X_j)$ zur Kenntnis, der in der folgenden Rechnung bewirkt, daß die formale Summe über die j zu einer Addition in I wird, dann können wir schreiben:

$$0 = \Pi(w) \otimes 1 \otimes 1 \in G(I) \otimes I \otimes F(I) \otimes I.$$

$$w = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n_j} a_i^j \otimes \xi_i^j \otimes b_i^j \otimes \eta_i^j - \Pi(w) \otimes 1 \otimes 1 =$$
$$= \sum_j \sum_i a_i^j \otimes \xi_i^j \otimes b_i^j \otimes \hat{\eta}_i^j(1) - \sum_j \sum_i \langle \eta_i^j, \xi_i^j\rangle a_i^j \otimes 1 \otimes b_i^j \otimes 1 =$$
$$= \sum_j \sum_i a_i^j \otimes \xi_i^j \otimes b_i^j \otimes \hat{\eta}_i^j(1) - \sum_j \sum_i a_i^j \otimes (\hat{\eta}_i^j)'(\xi_i^j) \otimes b_i^j \otimes 1 \in M.$$

Π ist surjektiv, denn schon $\Pi_I: G(I) \otimes I' \otimes F(I) \otimes I \to G(I) \otimes F(I)$ ist surjektiv. qued.

Über die Abbildung Π finden wir daher eine bijektive lineare Abbildung zwischen $A = \sum_{X \in \underline{K}}^{a} G(I) \otimes X' \otimes F(I) \otimes X/M$ und $G(I) \otimes \otimes F(I)$, und A ist Bild unter der Quotientenabbildung $\sum_{X \in \underline{K}} G(X) \hat{\otimes} \hat{\otimes} F(X) \to \sum_{X \in \underline{K}} G(X) \hat{\otimes} F(X)/N = G \underset{\underline{K}}{\hat{\otimes}} F$ vom dichten Teilraum $\sum_{X \in \underline{K}}^{a} G(I) \otimes X' \otimes F(I) \otimes X$. Daher können wir $G(I) \otimes F(I)$ mit einem dichten Teilraum von $G \underset{\underline{K}}{\hat{\otimes}} F$ identifizieren, und wir wollen die Norm untersuchen, die von $G \underset{\underline{K}}{\hat{\otimes}} F$ auf $G(I) \otimes F(I)$ induziert wird. Sie heiße μ.

Lemma: $\mu \geqslant \lambda$.

Beweis: Sei $a' \in G(I)'$, $b' \in F(I)'$.

Sei $V^{a' \otimes b'} : \sum_{X \in \underline{K}}^{a} G(I) \otimes X' \otimes F(I) \otimes X \to I$ definiert durch

$$V^{a' \otimes b'}\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n_X} a_i^X \otimes \xi_i^X \otimes b_i^X \otimes \eta_i^X\Big)_{X \in K}\Big) =$$

$$= \sum_{X \in K} \sum_{i=1}^{n_X} \langle a_i^X, a' \rangle \langle b_i^X, b' \rangle \langle \eta_i^X, \xi_i^X \rangle .$$

Dann ist $V^{a' \otimes b'}$ eine Linearform auf $\sum_{X \in K} G(I) \otimes X' \otimes F(I) \otimes X$, die M in ihrem Kern enthält, sie läßt sich also über

$$\begin{tikzcd}
\sum_{X \in \underline{K}} G(I) \otimes X' \otimes F(I) \otimes X \arrow[rr, "V^{a' \otimes b'}"] \arrow[d, "\Pi"'] & & I \\
G(I) \otimes F(I) \arrow[urr, "W^{a' \otimes b'}"'] & &
\end{tikzcd}$$

zu $W^{a' \otimes b'} : G(I) \otimes F(I) \to I$ faktorisieren, wobei

$$W^{a' \otimes b'}\Big(\sum_i a_i \otimes b_i\Big) = \sum_i \langle a_i, a' \rangle \langle b_i, b' \rangle$$

gilt.

Angenommen, wir wissen schon, daß $V^{a' \otimes b'}$ stetig ist in der von $\sum_{X \in \underline{K}} G(X) \hat{\otimes} F(X)$ induzierten Norm, dann gilt nach Definition der Quotientennorm auf $G \hat{\otimes}_{\underline{K}} F$, die μ induziert, $\| V^{a' \otimes b'} \| = \| W^{a' \otimes b'} \|$.

Sei zunächst $X \in \underline{K}$ festgehalten.

Wir betrachten $V^{a' \otimes b'} : G(I) \otimes X' \otimes F(I) \otimes X \to I$, wir untersuchen die Stetigkeit in der von $G(X) \hat{\otimes} F(X)$ induzierten Norm.

Sei α_X die von $G(X)$ auf $G(I)\otimes X'$ induzierte Norm, β_X die von $F(X)$ auf $F(I)\otimes X$. Dann gilt $\gamma \geqslant \alpha \geqslant \lambda$ und $\gamma \geqslant \beta \geqslant \lambda$ ($\alpha = \alpha_X$ für X fest), wobei γ die größte Crossnorm ist.
$\Phi_\beta^\lambda : F(I)\overline{\otimes}_\beta X = F(X) \to F(I)\hat{\hat{\otimes}} X$ ist auf $F(I)\otimes X$ die Identität und hat $\|\Phi_\beta^\lambda\| \leqslant 1$,

$b' \hat{\hat{\otimes}} 1_X : F(I)\hat{\hat{\otimes}} X \to I \hat{\hat{\otimes}} X = X$ ist eine stetige Abbildung mit Norm $\|b' \hat{\hat{\otimes}} 1_X\| \leqslant \|b'\|$, da $\hat{\hat{\otimes}}$ ein Funktor ist (vgl. V. L. LEVIN). Sei $F(I)\otimes_\beta X$ der normierte Raum $(F(I)\otimes X, \beta)$. Die analogen Überlegungen gelten für $G(I)\otimes X'$ und α. Damit können wir

$$V^{a'\otimes b'} : (G(I)\overline{\otimes}_\alpha X')\hat{\otimes}(F(I)\overline{\otimes}_\beta X) \to I$$

zerlegen in

$$\begin{tikzcd}
(G(I)\overline{\otimes}_\alpha X')\hat{\otimes}(F(I)\overline{\otimes}_\beta X) \arrow[d, "\Phi_\alpha^\lambda \hat{\otimes} \Phi_\beta^\lambda"] \\
(G(I)\hat{\hat{\otimes}} X')\hat{\otimes}(F(I)\hat{\hat{\otimes}} X) \arrow[d, "(a'\hat{\hat{\otimes}} X')\hat{\otimes}(b'\hat{\hat{\otimes}} X)"] \\
(I\hat{\hat{\otimes}} X')\hat{\otimes}(I\hat{\hat{\otimes}} X) \arrow[d, equal] \\
X'\hat{\otimes} X \arrow[d, "Tr"] \\
I
\end{tikzcd}$$

und es gilt:

$$\|\Phi_\alpha^\lambda \hat{\otimes} \Phi_\beta^\lambda\| \leqslant \|\Phi_\alpha^\lambda\|\,\|\Phi_\beta^\lambda\| \leqslant 1$$

$$\|(a' \hat{\hat{\otimes}} X')\hat{\otimes}(b' \hat{\hat{\otimes}} X)\| \leqslant \|a' \hat{\hat{\otimes}} X'\| \cdot \|b' \hat{\hat{\otimes}} X\| \leqslant \|a'\| \cdot \|b'\|, \; \|T r\| = 1$$

also insgesamt $\|V^{a'\otimes b'}\| \leqslant \|a'\|\cdot\|b'\|$ in der Norm von $G(X)\hat{\otimes} F(X)$; das gilt auch auf $\sum_{X\in \underline{K}} G(X)\hat{\otimes} F(X)$ nach der Definition des Coprodukts in $\underline{B}_1$

und $\qquad \|W^{a'\otimes b'}\| = \|V^{a'\otimes b'}\| \leqslant \|a'\| \cdot \|b'\|$,

für $\qquad W^{a'\otimes b'} : G(I)\otimes_\mu F(I) \to I$.

Somit ist für $a' \in G(I)'$, $b' \in F(I)'$

$$W^{a'\otimes b'} \in \big(G(I)\overline{\otimes}_\mu F(I)\big)' \text{ und } \|W^{a'\otimes b'}\| \leqslant \|a'\|\,\|b'\|.$$

Mit diesem Hilfsmittel können wir die Abschätzung $\mu \geqslant \lambda$ in Angriff nehmen:

Sei $\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \in G(I) \otimes F(I)$.

$$\begin{aligned}
\mu\left(\sum_i a_i \otimes b_i\right) &= \sup_{\substack{f \in (G(I) \overline{\otimes}_\mu F(I))' \\ \|f\| < 1}} \left|f\left(\sum_i a_i \otimes b_i\right)\right| \\
&\geqslant \sup_{\|a'\| < 1,\, \|b'\| < 1} \left|W^{a' \otimes b'}\left(\sum_i a_i \otimes b_i\right)\right| \\
&= \sup_{\substack{a' \in G(I)',\, b' \in F(I)' \\ \|a'\| < 1,\, \|b'\| < 1}} \left|\sum_i \langle a_i, a'\rangle \langle b_i, b'\rangle\right| \\
&= \lambda\left(\sum_i a_i \otimes b_i\right) \qquad \text{qued.}
\end{aligned}$$

Lemma: *μ ist Crossnorm, also $\mu \leqslant \gamma$*

Beweis: $a \otimes b \in G(I) \otimes F(I)$.

$$\mu(a \otimes b) \geqslant \lambda(a \otimes b) = \|a\| \cdot \|b\|$$

ist die Abschätzung nach unten.

Die nach oben führen wir wie folgt durch:

$$\begin{aligned}
\mu(a \otimes b) &= \inf_{m \in M} \|a \otimes 1 \otimes b \otimes 1 - m\|_{\sum_{X \in \underline{K}} G(X) \hat{\otimes} F(X)} \\
&\leqslant \|a \otimes 1 \otimes b \otimes 1\|_{\sum_{X \in \underline{K}} G(X) \hat{\otimes} F(X)} \\
&= \|a \otimes 1 \otimes b \otimes 1\|_{G(X) \hat{\otimes} F(X)} \\
&= \|a\|\,\|b\|. \qquad \text{qued.}
\end{aligned}$$

Satz: *Seien $G, F : \underline{K} \to \underline{B}$ kontra- bzw. kovariant, Funktoren vom Typ Σ. Dann ist $G \hat{\otimes}_{\underline{K}} F = G(I) \overline{\otimes}_\mu F(I)$, die Vervollständigung von $G(I) \otimes F(I)$ in einer Crossnorm $\mu \geqslant \lambda$. Wenn $G^1, F^1 : \underline{K} \to \underline{B}$ kontra- bzw. kovariant und $\eta : G \to G^1$, $\omega : F \to F^1$ natürliche Transformationen sind, dann sieht $\eta \hat{\otimes} \omega : G \hat{\otimes}_{\underline{K}} F \to G^1 \hat{\otimes}_{\underline{K}} F^1$ so aus:*

$$\begin{tikzcd}
G \hat{\otimes}_{\underline{K}} F \arrow[rr, "\eta \hat{\otimes} \omega"] \arrow[dr, swap, "\overline{\eta \hat{\otimes} \omega}"] & & G^1 \hat{\otimes}_{\underline{K}} F^1 \\
& G^1_e \hat{\otimes}_{\underline{K}} F^1_e \arrow[ur, swap, "i \otimes j"] &
\end{tikzcd}$$

wobei $I: G^1_e \to G^1$, $j: F^1_e \to F^1$ *die Einbettungen der wesentlichen Teilfunktoren sind und*

$$\overline{\eta \hat{\otimes} \omega} = \eta_I \otimes \omega_I : G(I) \overline{\otimes}_\mu F(I) \to G^1_e(I) \overline{\otimes}_{\mu_1} F^1_e(I).$$

Beweis: Den ersten Teil haben wir schon in vielen Lemmas bewiesen, der zweite Teil folgt leicht aus (I.1) und dem Ergebnis von V. L. LEVIN (analog zu (I.1) für kovariante Funktoren) und der Tatsache, daß $\underset{\underline{K}}{\hat{\otimes}} : \mathrm{Funkt}_{\mathrm{kontra}}(\underline{K}, \underline{B}) \times \mathrm{Funkt}_{\mathrm{ko}}(\underline{K}, \underline{B}) \to \underline{B}$ ein zulässiger Funktor ist, das heißt linear und Kontraktion auf den Morphismenräumen (vgl. CIGLER). qued.

4. Das Tensorprodukt mit Σ_A

$\underline{K}$ sei wieder eine volle Teilkategorie von $\underline{B}$ mit $I \in \underline{K}$.

Satz: *Sei* $F: \underline{K} \to \underline{B}$ *ein kovarianter Funktor vom Typ* Σ *und* $G = \Sigma_A(.')/\underline{K}$ *für* $A \in \underline{B}$. *Dann ist* $G \underset{\underline{K}}{\hat{\otimes}} F = A \hat{\otimes} F(I)$.

Beweis: Nach (I.2) ist $G \underset{\underline{K}}{\hat{\otimes}} F = G(I) \overline{\otimes}_\mu F(I) = A \overline{\otimes}_\mu F(I)$ und $\gamma \geqslant \mu \geqslant \lambda$. Wir zeigen $\mu \geqslant \gamma$ und verwenden dazu die Notation des Abschnitts 2. Sei $u = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \in A \otimes F(I)$.
Dann ist $u = \Pi_I(\sum_i a_i \otimes 1 \otimes b_i \otimes 1)$ und wegen
$A \hat{\otimes} F(I) = (A \hat{\otimes} I) \hat{\otimes} F(I)$ gilt $\gamma(u) = \|u \otimes 1 \otimes 1\|_{(A \hat{\otimes} I) \hat{\otimes} F(I)}$.
Wir setzen $u \otimes 1 \otimes 1$ an den Koordinaten $X \neq I$ mit 0 fest und erhalten so ein Element v von $\sum_{X \in \underline{K}} (A \hat{\otimes} X) \hat{\otimes} F(X)$ mit $\Pi(v) = u$. Dafür gilt:

$$\begin{aligned} \gamma(u) &= \|v\|_{\sum_{X \in \underline{K}} (A \hat{\otimes} X) \hat{\otimes} F(X)} \\ &\geqslant \inf_{m \in N} \|v - m\|_{\sum_{X \in \underline{K}} (A \hat{\otimes} X) \hat{\otimes} F(X)} \\ &= \mu(u). \end{aligned}$$

Also ist $\mu = \gamma$ und der Satz bewiesen.

Ganz analog gilt folgender

Satz: *Sei* $G: \underline{K} \to \underline{B}$ *ein kontravarianter Funktor vom Typ* Σ *und* $A \in \underline{B}$. *Dann ist* $G \underset{\underline{K}}{\hat{\otimes}} (\Sigma_A|_{\underline{K}}) = G(I) \hat{\otimes} A$.

5. Darstellung von $G \hat{\otimes} F$ und $n.t.H(F, G)$ als Limiten in B_1

Wir verwenden die Notation von MITJAGIN—SHVARTS

Satz: *Sei $\underline{K}$ eine volle Teilkategorie von $\underline{B}$, $G:\underline{K}\to\underline{B}$ ein kontra- und $F:\underline{K}\to\underline{B}$ ein kovarianter Funktor. Dann kann $G \hat{\otimes}_{\underline{K}} F$ als induktiver Limes von Räumen $G(X)\hat{\otimes} F(Y)$ in $\underline{B}_1$ dargestellt werden.*

Beweis: Indexklasse sei die Klasse aller Morphismen in $\underline{K}_1$. Jedem $\lambda: X\to Y$ in $\underline{K}_1$ ordnen wir den Banachraum $R^\lambda = G(Y)\hat{\otimes} F(X)$ zu. Jedes Paar (α,β) von Morphismen in $\underline{K}_1$, für das das Diagramm

$$(\ast)\qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \\ Z \arrow[r, "\mu"] & U \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

kommutativ ist, definiert eine Abbildung $\pi_\lambda^\mu \in \Pi_\lambda^\mu : R^\lambda \to R^\mu$, wobei $\pi_\lambda^\mu = G(\beta)\hat{\otimes} F(\alpha): G(Y)\hat{\otimes} F(X)\to G(U)\hat{\otimes} F(Z)$ ist. $(R^\lambda, \Pi_\lambda^\mu)$ ist klarerweise eine Spektralfamilie. Der Morphismus $\pi_\lambda: R^\lambda \to G\hat{\otimes} F$ ist gegeben durch

$$\pi_\lambda\Big(\sum_{i=1}^n g_Y^i \otimes f_X^i\Big) = \Big(\Big(\sum_{i=1}^n g_Y^i \otimes F(\lambda) f_X^i\Big)\,\delta_{Y,Z}\Big)_{Z\in \underline{K}} =$$
$$= \Big(\Big(\sum_{i=1}^n G(\lambda) g_Y^i \otimes f_X^i\Big)\,\delta_{X,Z}\Big)_{Z\in \underline{K}}.$$

Man bemerkt, daß die Differenz beider Elemente in N liegt, also π_λ dadurch wohldefiniert ist, und $\|\pi_\lambda\| \leqslant \|\lambda\|$ gilt.

$$\pi_\mu \circ \pi_\lambda^\mu\Big(\sum_{i=1}^n g_Y^i \otimes f_X^i\Big) =$$
$$= \pi_\mu\Big(\sum_{i=1}^n G(\beta) g_Y^i \otimes F(\alpha) f_X^i\Big) =$$
$$= \Big(\Big(\sum_{i=1}^n G(\mu)\, G(\beta) g_Y^i \otimes F(\alpha) f_X^i\Big)\,\delta_{Z,K}\Big)_{K\in \underline{K}} =$$
$$= \Big(\Big(\sum_{i=1}^n G(\alpha)\, G(\mu)\, G(\beta) g_Y^i \otimes f_X^i\Big)\,\delta_{X,K}\Big)_{K\in \underline{K}} \text{ modulo } N =$$
$$= \Big(\Big(\sum_{i=1}^n G(\beta\mu\alpha) g_Y^i \otimes f_X^i\Big)\,\delta_{X,K}\Big)_{K\in \underline{K}} =$$
$$= \Big(\Big(\sum_{i=1}^n G(\lambda) g_Y^i \otimes f_X^i\Big)\,\delta_{X,K}\Big)_{K\in \underline{K}} =$$
$$= \pi_\lambda\Big(\sum_{i=1}^n g_Y^i \otimes f_X^i\Big).$$

Wir zeigen jetzt, daß $G\hat{\otimes}F = \underrightarrow{\lim}(R^\lambda, \Pi_\lambda^\mu)$ ist. Sei $A \in \underline{B}_1$ ein beliebiger Banachraum und $\tau_\lambda: R^\lambda \to A$ eine Abbildung aus der Spektralfamilie $(R^\lambda, \Pi_\lambda^\mu)$ in A; d. h. es gilt $\tau_\lambda = \tau_\mu \circ \pi_\lambda^\mu$ für jedes $\pi_\lambda^\mu \in \Pi_\lambda^\mu$. Natürlich gelte noch $\|\tau_\lambda\| \leqslant 1$.
Wir müssen eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\tau: G\hat{\otimes} F \to A$ finden mit $\tau_\lambda = \tau \circ \pi_\lambda$.
Speziell soll für $X \in \underline{K}$ $\tau_{1_X} = \tau \circ \Pi_{1_X}$ sein; und das definiert schon die Abbildung $\tau := \sum\limits_{X \in \underline{K}} \tau_{1_X} : \sum\limits_{X \in \underline{K}} G(X) \hat{\otimes} F(X) \to A$. Dann ist τ als Summenbildung der τ_{1_X} linear und Kontraktion. Wir zeigen, daß $\ker \tau \supseteq N$ gilt; also daß τ sich über $G\hat{\otimes} F$ faktorisieren läßt. N wird erzeugt von Elementen der Form

$$\sum_i G(\lambda) g_Y^i \otimes f_X^i - \sum_i g_Y^i \otimes F(\lambda) f_X^i,$$

$$\lambda: X \to Y \text{ und } \sum_i g_Y^i \otimes f_X^i \in G(Y) \hat{\otimes} F(X);$$

dabei kann λ ohne weiteres als Kontraktion vorgegeben werden. Wir haben folgende kommutative Diagramme:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\lambda"'] & Y \\ Y \arrow[r, "1_Y"] & Y \arrow[u, "1_Y"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "1_X"'] & Y \\ X \arrow[r, "1_X"] & X \arrow[u, "\lambda"'] \end{tikzcd}$$

welche die Morphismen

$$\pi_\lambda^{1_Y} = G(1_Y) \hat{\otimes} F(\lambda) \in \Pi_\lambda^{1_Y}$$

und

$$\pi_\lambda^{1_X} = G(\lambda) \hat{\otimes} F(1_X) \in \Pi_\lambda^{1_X}$$

definieren.

Es gilt $\tau_{1_Y} \cdot \pi_\lambda^{1_Y} = \tau_\lambda$ und $\tau_{1_X} \cdot \pi_\lambda^{1_X} = \tau_\lambda$.

$$\tau\Big(\sum_i G(\lambda) g_Y^i \otimes f_X^i - \sum_i g_Y^i \otimes F(\lambda) f_X^i\Big) =$$

$$= \tau_{1_X}\Big(\sum_i G(\lambda) g_Y^i \otimes f_X^i\Big) - \tau_{1_Y}\Big(\sum_i g_Y^i \otimes F(\lambda) f_X^i\Big) =$$

$$= \tau_{1_X} \cdot \pi_\lambda^{1_X}\Big(\sum_i g_Y^i \otimes f_X^i\Big) - \tau_{1_Y} \cdot \pi_\lambda^{1_Y}\Big(\sum_i g_Y^i f_X^i\Big) =$$

$$= \tau_\lambda\Big(\sum_i g_Y^i \otimes f_X^i\Big) - \tau_\lambda\Big(\sum_i g_Y^i \otimes f_X^i\Big) = 0.$$

Also ist $\tau: G\hat{\otimes} F \to A$ wohldefiniert.

Wir zeigen $\tau_\lambda = \tau \circ \pi_\lambda$.

$$\begin{aligned}\tau \circ \pi_\lambda (\sum_i g_Y^i \otimes f_X^i) = \\ = \tau \left((\sum_i G(\lambda)\, g_Y^i \otimes f_X^i)\, \delta_{X,z} \right)_{z \in \underline{K}} = \\ = \tau_{1_X} (\sum_i G(\lambda)\, g_Y^i \otimes f_X^i) = \\ = \tau_{1_X} \cdot \pi_\lambda^{1_X} (\sum_i g_Y^i \otimes f_X^i) = \\ = \tau_\lambda (\sum_i g_Y^i \otimes f_X^i).\end{aligned}$$

Also ist $\tau_\lambda = \tau \cdot \pi_\lambda$; diese Bedingung hat auch die Gestalt von τ erzwungen, also ist τ eindeutig. qued.

Auf ähnliche Art kann man den folgenden Satz beweisen.

Satz (Linton): *$F, G: \underline{K} \to \underline{B}$ seien kovariante Funktoren. Dann kann n. t. H. (F, G) als projektiv Limes in $\underline{B}_1$ von Räumen $H(F(X), G(Y))$; $X, Y \in \underline{K}$ dargestellt werden.*

6. Darstellung von Funktoren als Limiten

Die Resultate von § 5 und der folgende Satz liefern verschiedene Darstellungen von Funktoren als Limiten.

Satz (Mitjagin—Shvarts): *$(S^\lambda, \Pi_\mu^\lambda)$ seine Spektralfamilie in* Funkt $(\underline{K}_1, \underline{B}_1)$ *und für jedes $X \in \underline{K}$ existiere der induktive (projektive) Limes der Spektralfamilie $(S^\lambda(X), \Pi_\mu^\lambda(X))$ in $\underline{B}_1$.*
Dann existiert auch der induktive (projektive) Limes von $(S^\lambda, \Pi_\mu^\lambda)$ in Funkt $(\underline{K}_1, \underline{B}_1)$ *und für jedes $X \in \underline{K}$ gilt:*

$$[\varinjlim (S^\lambda, \Pi_\mu^\lambda)](X) = \varinjlim \left(S^\lambda(X), \Pi_\mu^\lambda(X)\right)$$
$$\left([\varprojlim (S^\lambda, \Pi_\mu^\lambda)](X) = \varprojlim \left(S^\lambda(X), \Pi_\mu^\lambda(X)\right)\right).$$

Satz: *Sei $F: \underline{K} \to \underline{B}$ ein kovarianter Funktor. Dann ist F induktiver Limes einer Spektralfamilie von Funktoren der Gestalt $\Sigma_{F(X)} \circ H_Y$ in* Funkt $(\underline{K}_1, B_1)$.

Beweis: Nach Satz 2 von Cigler ist $F = H \hat{\otimes}_{\underline{K}} F$, also $F(A) = = H^A \hat{\otimes}_{\underline{K}} F$ für $A \in \underline{K}$ und nach 5) ist $H^A \hat{\otimes}_{\underline{K}} F = \varinjlim (R^\lambda(A), \Pi_\lambda^\mu(A))$, wobei für $\lambda: X \to Y$ in $\underline{K}_1$ der Raum $R^\lambda(A) = H(Y, A) \hat{\otimes} F(X)$ ist, und $\pi_\lambda^\mu(A): R^\lambda(A) \to R^\mu(A)$ durch ein kommutatives Diagramm $(\substack{*\\*})$ (5.) und die Gleichung $\pi_\lambda^\mu(A) = H(\beta, A) \otimes F(\alpha)$ gegeben ist. Der Rest des Beweises folgt aus dem vorigen Satz; man prüft

leicht nach, daß für $f:X\to Y$ in $\underline{K}$ $F(f)=[\lim(R^\lambda,\Pi_\lambda^\mu)](f)$ ist (man benötigt den Beweis des Satzes von Mitjagin—Shvarts).
Dieser Satz wurde auf andere Art schon von Pokasejeva—Shvarts bewiesen.

Satz: *Sei $F:\underline{K}\to\underline{B}$ ein kovarianter Funktor. Dann ist II als projektiver Limes von Funktoren der Gestalt $H^{F(Y)}\circ H^X$ in Funkt $\underline{K}_1,\underline{B}_1)$ darstellbar.*

Beweis: Wir verwenden das Yoneda-Lemma:
$F=n.t.H(H,F)$, $F(A)=n.t.H(H_A,F)$ für $A\in\underline{K}$, und nach 5) ist $n.t.H(H_A,F)=\varinjlim(P^\lambda(A),\Pi_\mu^\lambda(A))$ in $\underline{B}_1$, wobei für $\lambda:X\to Y$ in $\underline{K}_1$ $P^\lambda(A)=H(H(A,X),F(Y))=H^{F(Y)}\circ H^X(A)$ ist und ein kommutatives Diagramm $(^*_*)$ in $\underline{K}_1$ eine Abbildung
$\pi_\mu^\lambda(A)=H(H(A,\alpha),F(\beta)):P^\mu(A)\to P^\lambda(A)$ definiert. Nach dem ersten Satz von 6. existiert wieder $\lim(P^\lambda,\Pi_\mu^\lambda)$ in Funkt $(\underline{K}_1,\underline{B}_1)$ und für $A\in\underline{K}$ ist $[\lim(P^\lambda,\Pi_\lambda^\mu)](A)=n.t.H(H_A,F)=F(A)$ und man rechnet leicht nach, daß auch für $f:A\to B$ in $\underline{K}$ $[\lim(P^\lambda,\Pi_\lambda^\mu)](f)=$ $=F(f)$ ist.

Ganz analog erhält man die Darstellungen von kontravarianten Funktoren G: Jedes G ist induktiver Limes von Funktoren der Gestalt $\Sigma_{G(Y)}\circ H^X$ in Funkt $(\underline{K}_1,\underline{B}_1)$ (nach Cigler ist $G\hat{\otimes}_{\underline{K}}H=G$, $G\hat{\otimes}_{\underline{K}}H_A=G(A)$), und ist projektiver Limes von Funktoren der Gestalt $H^{G(X)}\circ H_Y$.

Literatur

Cigler, J.: Funktoren auf Kategorien von Banachräumen. Mh. Math. **78**, 15—24 (1974).

Levin, V. L.: Tensor-products and functors in categories of Banach-spaces defined by KB-Lineals. Trudy Moskov. Mat. Obsc. **20** (1969), Trans. Moskov Math. Soc. **20**, 41—77 (1969).

Linton, F. E. J.: Autonomous categories and duality of functors. J. Algebra **2**, 315—349 (1965).

MacLane, S.: Kategorien. Berlin–Heidelberg–New York: Springer. 1972.

Mitjagin, B. S., and A. S. Shvarts: Functors in categories of Banach-spaces. Russian Math. Surveys **19**, 2, 65—127 (1964).

Pokasejeva, R. S., and A. S. Shvarts: Dualität von Funktoren (russ.). Matem. Sbornik **71**, 357—385 (1966).

Anschrift des Verfassers:
P. Michor
Mathematisches Institut der Universität Wien
Strudlhofgasse 4
A-1090 Wien, Österreich

Printed in Austria