FUNKTOREN AUF KATEGORIEN

VON BANACHRÄUMEN

Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades

an der

Philosophischen Fakultät

der

Universität Wien

eingereicht von

Peter M i c h o r

Wien 1973

UNIVERSITÄT WIEN
PHILOSOPHISCHE FAKULTÄT

A u s z u g   a u s   d e r   D i s s e r t a t i o n :

FUNKTOREN AUF KATEGORIEN VON BANACHRÄUMEN

verfaßt von: Peter Michor

Die Dissertation besteht aus 7 Kapiteln.
Im 1.Kapitel werden kontravariante Funktoren vom Typ Σ behandelt und dann wird gezeigt, daß das Tensorprodukt von Funktoren vom Typ Σ wieder "vom Typ Σ " ist.
Mit Hilfe dieser Ergebnisse wird im 2. Kapitel gezeigt, daß die Funktoren auf Funktorkategorien, die durch Einschränken von Funktoren auf Teilkategorien bzw. dann noch Auswählen des wesentlichen Teilfunktors definiert sind, beide sowohl Links- als auch Rechtsadjungierte besitzen.
Im 3. Kapitel wird gezeigt, dann in $\underline{B}_1$ jeder Banachraum induktiver Limes vom endlichdimensionalen Räumen mit Summennorm ist.
Im 4. Kapitel wird gezeigt, daß die Dualität von Funktoren im Sinne von Mitjagin - Shvarts sich durch sogenannte normierte Linksideale und deren Dualität ausdrücken läßt, wenn man die Grothendieck'sche Approximationsbedingung voraussetzt. Mit diesen Hilfsmitteln gelingt auch eine vollständige Charakterisierung aller reflexiven Funktoren und ein Kriterium zur Reflexivität eines dualen Funktors.
Im 5. Kapitel werden das Tensoprodukt von Funktoren und der Raum natürlicher Transformationen als induktiver bzw. projektiver Limes in $\underline{B}_1$ dargestellt und damit dann verschiedene Darstellungssätze durch Limiten für Funktoren abgeleitet.
Das 6. Kapitel behandelt Funktoren zwischen Kategorien von Waelbroeck-Räumen und Banachräumen und natürliche Transformationen zwischen diesen beiden Kategorien. Es werden Sätze bewiesen, die in der Formulierung dem Yoneda-Lemma ähnlich sind.
Im 7. Kapitel schließlich wird mit Hilfe der Ergebnisse des vorigen Kapitels ein neuer Dualitätsbegriff, die sogenannte Δ-Dualität, eingeführt und in seinen grundlegenden Eigenschaften untersucht.

Meinem verehrten und geschätzten Lehrer Herrn Professor Dr. J. Cigler möchte ich an dieser Stelle meinen herzlichen und aufrichtigen Dank aussprechen, besonders für die Themenstellung, die Mühe der Durchsicht und viele Ratschläge, Hinweise und hilfreiche Diskussionen.

Die Anregung zu diesem Thema und die dafür nötigen Kenntnisse erhielt ich in den Seminaren und Privatissima, die Professor Dr. J. Cigler in Wien darüber abhielt.

Inhalt

0. Vorwort, Notation und allgemeine Voraussetzungen

Die Anwendung der Kategorientheorie auf die Funktionalanalysis ist noch recht jung. Man kann dabei zwei Richtungen unterscheiden: die erste bemüht sich um eine bessere Beschreibung der "Objekte" mit Hilfe der Kategorien. Ein Beispiel für die Nützlichkeit dieser Theorie ist das Buch von Semadeni. Die zweite Richtung bemüht sich vor allem um eine Strukturtheorie der Funktoren, die in funktionalanalytischen Kategorien auftreten. Der erste bahnbrechende Schritt in dieser Richtung war die Arbeit von Mitjagin-Schwartz; eine wichtige Rolle spielen dabei Tensorprodukte von Banachräumen und die Ergebnisse von Schatten und Grothendieck darüber. Der nächste bedeutende Schritt war die Arbeit von V.L. Levin und an die genannten Artikel schließt diese Arbeit an.

Wir betrachten zwei Arten von Kategorien von Banachräumen über dem Grundkörper I(=R oder $\mathbb{C}$, aber nur eines von beiden).

1) Solche, in denen Morphismen beschränkte lineare Abbildungen zwischen Banachräumen sind

   z.B.: $\underline{B}$ ... die Kategorie aller Banachräume

   $\underline{A}$ ... die Kategorie der Banachräume, die der metrischen Approximationsbedingung von Grothendieck (siehe später) genügen

   und volle Teilkategorien davon.

2) Solche Kategorien, in denen Morphismen lineare Kontraktionen sind (z.B. $\underline{B}_1, \underline{A}_1, \ldots$); $\underline{B}_1$ ist vollständig und kovollständig.

Im 1.Fall läßt sich der Hom-Funktor in die Kategorie "liften": $H(X,Y) = (\underline{B}(X,Y)$ mit Operatornorm); im 2.Fall erweitern wir ihn so.

Wir betrachten nur solche (zulässige) Funktoren zwischen diesen Kategorien, die zusätzlich linear und Kontraktionen auf den Morphismenräumen

$(H(X,Y) \longrightarrow H(F(X),F(Y))$ sind. Auch unter den natürlichen Transformationen treffen wir eine Auswahl: eine (zulässige) natürliche Transformation $\eta : X \mapsto \eta_X$ erfüllt noch : $\|\eta\| = \sup_X \|\eta_X\| < \infty$
Man beachte, daß wir dadurch eine (i.a. nicht volle) Teilkategorie der Funktorkategorie definiert haben.

Der "Raum" n.t.H(F,G) aller natürlichen Transformationen vom Funktor F in den Funktor G ist ein Banachraum, wenn er Menge ist. Diese Tatsache ist zum Beispiel Ausgangspunkt für die Dualitätstheorie der Funktoren. Das Problem "wenn er Menge ist" berührt uns im folgenden nicht weiter: im Zweifelsfall nehmen wir es einfach an. Eine heuristische Begründung dieses Standpunktes ist die Aussage über Grundlagen bei Cigler, der wir uns vollinhaltlich ausschließen. Gewisse Ergebnisse finden sich bei Linton.

Eine Crossnorm auf dem algebraischen Tensorprodukt $X \otimes Y$ zweier Banachräume ist eine Norm p mit $p(x \otimes y) = \|x\| \|y\|$ Das projektive Tensorprodukt $X \hat{\otimes} Y$ von X und Y ist die Vervollständigung von $X \otimes Y$ in der größten Crossnorm μ , die für $u \in X \otimes Y$ durch

$$\mu(u) = \inf\left\{\sum \|x_i\| \|y_i\| , \quad u = \sum x_i \otimes y_i \quad \text{in} \quad X \otimes Y\right\}$$

definiert ist.
Das induktive Tensorprodukt $X \hat{\hat{\otimes}} Y$ ist die Vervollständigung in der Norm λ :

$$\lambda\left(\sum x_i \otimes y_i\right) = \sup\left\{\left|\sum \langle x_i, x'\rangle \langle y_i, y'\rangle\right|, \ x' \in X', \ y' \in Y', \ \|x'\| \leqslant 1, \ \|y'\| \leqslant 1\right\}.$$

λ ist die von der Operatornorm durch die Einbettung $i: X\otimes Y \longrightarrow H(X', Y)$ auf $X\otimes Y$ induzierte Norm; dabei ist

$$i(\sum x_i \otimes y_i) = \sum \langle x_i, \cdot \rangle y_i .$$

Das projektive Tensorprodukt definiert einen Funktor $\sum_X : Y \longmapsto X\hat{\otimes}Y$, der linksadjungiert zum gelifteten Hom-Funktor ist: $H(X\hat{\otimes}Y,Z) = H(X,H(Y,Z))$ natürlich in X,Y,Z über jeder vollen Kategorie von Banachräumen, gegeben durch die Zuordnung von $f \in H(X\hat{\otimes}Y,Z)$ und $\bar{f} \in H(X,H(Y,Z))$ vermittels $f(x\otimes y) = \bar{f}(x)(y)$.

Wegen der zusätzlichen Einschränkungen auf Funktoren und natürlichen Transformationen findet das Yoneda-Lemma nicht mehr in der Mengen-Kategorie, sondern in der betrachteten Kategorie selbst "statt": $n.t.H(H_X,F) = F(X)$ isometrisch isomorph, wobei $\varphi : H_X \longrightarrow F$ und $\varphi_X(1_X) \in F(X)$ einander eindeutig entsprechen (vgl. Mitjagin-Schwartz).

Eine interessante Folgerung dieser Tatsache ist: Wenn F ein zulässiger Funktor ist und $\varphi : H_X \longrightarrow F$ eine natürliche Transformation, dann ist φ schon zulässig.

Eine wesentliche Rolle in dieser Arbeit spielt die (metrische) Approximationsbedingung von Grothendieck. Ein Banachraum X erfüllt sie, wenn 1_X auf präkompakten Teilmengen gleichmäßig durch endlichdimensionale Operatoren $X \longrightarrow X$ (von Norm ≤ 1) approximierbar ist. Das folgende in X und Y natürliche kommutative Diagramm liefert äquivalente Bedingungen:

$$\begin{tikzcd}
X \hat{\otimes} Y \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\rho"'] & L(X',Y) \\
L^1(X',Y) \arrow[r, "\tilde{t}"] & X \hat{\hat{\otimes}} Y \arrow[u, "r"']
\end{tikzcd}$$.

Dabei ist $L^1(X',Y)$ der Raum der nuklearen schwach* stetigen Abbildungen $X' \longrightarrow Y$, also das Bild von t mit Quotientennorm, wobei t die stetige Erweiterung von i ist; r ist die Einbettung und $\tilde{t}$ der aus t faktorisierte Bimorphismus.

Dann sind äquivalent:

1) X erfüllt die Approximationsbedingung.
2) p ist injektiv für jedes $Y \in \underline{B}$ (also $\sum_X = L^1(X',.)$.)
3) r ist surjektiv für jedes $Y \in \underline{B}$ (also $X \hat{\hat{\otimes}} . = L(X',.)$.)
4) Der Raum $K(X,X)$ aller kompakten Abbildungen $X \longrightarrow X$ mit Operatornorm besitzt eine approximierende Linkseinheit aus endlichdimensionalen Operatoren. (vgl. Buchwalter).

Man hat noch keinen Banachraum gefunden, der nicht der Approximationsbedingung genügt.

Ausführliche Inhaltsangaben finden sich zu Beginn der einzelnen Kapitel.

I. Das Tensorprodukt von Funktoren vom Typ Σ.

Ziel dieses Kapitels ist es, das von J.Cigler eingeführte Tensorprodukt von Funktoren für Funktoren vom Typ Σ genauer zu bestimmen. Dazu wird zunächst der Begriff Typ Σ auf kontravariante Funktoren erweitert; die Resultate von V.L. Levin werden auch für kontravariante Funktoren hergeleitet.

Dann wird das Tensorprodukt zweier wesentlicher Funktoren ermittelt; hier findet sich das Hauptergebnis dieses Kapitels:

> Seien $G,F : \underline{K} \longrightarrow \underline{B}$ kontra- bzw. kovariant, Funktoren vom Typ Σ.
> Dann ist ihr Tensorprodukt $G \hat{\otimes}_{\underline{K}} F = G(I) \bar{\otimes}_{\mu} F(I)$, die Vervollständigung von $G(I) \otimes F(I)$ in einer Crossnorm μ, die $\mu \geq \lambda$ erfüllt.

Im nächsten Abschnitt wird diese Crossnorm μ für den Spezialfall $G = \Sigma_A(.)' : X \longmapsto A \hat{\otimes} X'$ ausgerechnet.

(I.1) Kontravariante Funktoren vom Typ Σ.

Dieser Abschnitt orientiert sich stark an der Arbeit von V.L.Levin.

Sei G ein kontravarianter Funktor von einer vollen Teilkategorie $\underline{K}$ von $\underline{B}$. ($I \in \underline{K}$).

Wir definieren für $X \in \underline{K}$ eine Abbildung:

$$i'_X : G(I) \otimes X' \longrightarrow G(X) \quad \text{durch}$$

$$i'_X\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x'_i\right) = \sum_{i=1}^{n} G(x'_i)a_i \quad \text{für} \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x'_i \in G(I) \otimes X';$$

da x'_i ein Morphismus $X \longrightarrow I$ ist, ist $G(x'_i)$ ein Morphismus $G(I) \longrightarrow G(X)$.

<u>Lemma:</u> Die Abbildung i'_X ist injektiv, wir

können also $G(I) \otimes X'$ als linearen Teilraum von $G(X)$ auffassen.

<u>Beweis:</u> Angenommen, es existiert ein $u \neq 0$ in $G(I) \otimes X'$ mit $i'_X(u) = 0$ in $F(X)$. Es gibt eine Darstellung $u = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x'_i$, $a_i \in G(I)$, $x'_i \in X'$ mit (a_i) und (x'_i) linear unabhängig. Sei für $x \in X$: $\hat{x} : I \to X$ definiert durch $\hat{x}(1) = x$, also $G(\hat{x}) : G(X) \to G(I)$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
0 = G(\hat{x})\, i'_X(u) &= \sum_{i=1}^{n} G(\hat{x}) G(x'_i) a_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} G(x'_i \circ \hat{x}) a_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} G(\langle x, x'_i \rangle 1_I) a_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle x, x'_i \rangle G(1_I) a_i \quad \text{weil } G \text{ linear ist} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle x, x'_i \rangle a_i \qquad \text{für jedes } x \in X.
\end{aligned}
$$

Weil (a_i) l.u. ist, gilt $\langle x, x'_i \rangle = 0$ für alle $x \in X$ und für $i=1,\dots,n$, also $x'_i = 0$ für alle i, also $u=0$ im Widerspruch zur Annahme. qed.

<u>Lemma:</u> Die von $G(X)$ auf $G(I) \otimes X'$ induzierte Norm ist eine Crossnorm α und $\alpha \geq \lambda$.

<u>Beweis:</u> $\alpha \geq \lambda$:

Sei $a' \otimes x \in G(I)' \otimes X'$; $\hat{x} : I \to X$ $G(\hat{x}) : G(X) \to G(I)$, also $a' \circ G(\hat{x}) : G(X) \to G(I) \to I$.

$\| a' G(\hat{x}) \| \leq \| a' \| \cdot \| G(\hat{x}) \| \leq \| a' \| \, \| x \|$,

daher definiert $a' \otimes x$ eine stetige Linearform auf $G(X)$ mit Norm $\leq \| a' \| \, \| x \|$.

Sei $\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i' \in G(I) \otimes X'$. Dann gilt:

$$\alpha\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i'\right) = \sup_{g \in G(X)', \|g\| \leqslant 1} \left| g \cdot i_X\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i'\right)\right|$$

$$\geqslant \sup_{\|a' G(\hat{\hat{x}}')\| \leqslant 1} \left| a' G(\hat{\hat{x}})\, i_X\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i'\right)\right|$$

$$\geqslant \sup_{\|a'\| \leqslant 1, \|x\| \leqslant 1} \left|\sum_{i=1}^{n} \langle a_i, a'\rangle \langle x, x_i'\rangle\right|$$

$$= \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i'\right).$$ Nach einem Lemma aus dem Corrigendum.

ist Crossnorm:

$\alpha(a \otimes x') = \|G(x')a\|_{G(X)} \leqslant \|G(x')\| \|a\| \leqslant \|x'\| \|a\|$ ist die Abschätzung nach oben und $\alpha(a \otimes x') \geqslant \lambda(a \otimes x') = \|a\| \|x'\|$ die nach unten. qed.

<u>Definition:</u> Die kontravarianten Funktoren $G : \underline{K} \to \underline{B}$, die für alle $X \in \underline{K} : i_X(G(I) \otimes X')$ dicht in $G(X)$ erfüllen, heißen kontravariante Funktoren vom Typ Σ, auch wesentliche Funktoren.

<u>Satz:</u> Wenn $G : \underline{K} \to \underline{B}$ kontravariant vom Typ Σ ist, so ist $G(X) = G(I) \tilde{\otimes}_\alpha X'$, die Vervollständigung von $G(I) \otimes X'$ in einer Crossnorm $\alpha_X \geqslant \lambda$ und

$G(f) = 1_{G(I)} \otimes f'$ für jeden Morphismus $f : X \to Y$ in $\underline{K}$.

Sei H Kontravariant: $\underline{K} \to \underline{B}$ und $\varphi : G \to H$ eine natürliche Transformation, dann ist $\varphi_X = \varphi_I \otimes 1_X \quad \forall X \in \underline{K}$.

Die letzte Aussage heißt unter anderem, daß $\varphi_X(G(X)) \subseteq G_e(X)$, im wesentlichen Teilfunktor H_e von H. (e für essentiell)

<u>Beweis:</u> Der erste Teil folgt aus den beiden Lemmas.

Sei $f : X \longrightarrow Y$ in $\underline{K}$. Dann haben wir:

$$\begin{aligned} G(f)\, i_X\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x'_i\Big) &= G(f) \sum_i G(x'_i)\, a_i \\ &= \sum_i G(x'_i \circ f)\, a_i \\ &= \sum_i G(f'(x'_i))\, a_i \\ &= i_Y\Big(\sum_i a_i \otimes f'(x'_i)\Big). \end{aligned}$$

Also ist $G(f) = 1_{G(I)} \otimes f'$.

Sei $\varphi : G \longrightarrow H$ natürlich.

$$\begin{tikzcd} G(I) \arrow[r, "\varphi_I"] \arrow[d, "G(x')"'] & H(I) \arrow[d, "H(x')"] \\ G(X) \arrow[r, "\varphi_X"] & H(X) \end{tikzcd}$$

ist kommutativ

für jedes $x' \in X'$. Damit ergiebt sich:

$$\begin{aligned} \varphi_X i_X\Big(\sum_i a_i \otimes x'_i\Big) &= \varphi_X\Big(\sum_i G(x'_i)\, a_i\Big) \\ &= \sum_i H(x_i)\, \varphi_I(a_i) \\ &= j_X\Big(\sum_i \varphi_I(a_i) \otimes x'_i\Big), \end{aligned}$$

wo $j_X : H(I) \otimes X' \longrightarrow H(X)$ die Einbettung ist, also $\varphi_X = \varphi_I \otimes 1_{X'}$.

<u>Korollar:</u> Für jeden kontravarianten Funktor H existiert $\mathrm{n.t.}_{\underline{K}}\, H(G,H)$ und ist Teilmenge von $H(G(I), H(I))$.

<u>Korollar:</u> Seien $G, H : \underline{K} \longrightarrow \underline{B}$ kontravariante Funktoren vom Typ Σ und $\varphi : G \longrightarrow H$ eine natürliche Transformation.

Dann ist

$$\begin{tikzcd} G(X) \arrow[r, "\varphi_I \otimes 1_{X'} = \varphi_X"] \arrow[d] & H(X) \arrow[d] \\ G(I) \hat{\hat{\otimes}} X' \arrow[r, "\varphi_I \hat{\hat{\otimes}} 1_{X'}"] & H(I) \hat{\hat{\otimes}} X' \end{tikzcd}$$

für jedes $X \in \underline{K}$ kommutativ, wo $G(X) = G(I) \bar{\otimes}_\alpha X' \longrightarrow G(I) \hat{\hat{\otimes}} X'$ die stetige Erweiterung der Identität auf $G(I) \otimes X'$ ist.

(I.2) <u>Das Tensorprodukt von Funktoren vom Typ Σ .</u>

$\underline{K}$ sei wieder eine volle Teilkategorie von $\underline{B}$, die den eindimensionalen Raum I enthält (damit die Aussage "Typ Σ " Sinn hat).

$G, F : \underline{K} \to \underline{B}$ seien kontra- bzw. kovariant, Funktoren vom Typ Σ , die in der Folge festgehalten werden. (Für F sieht die Abbildung

$i_X^F : F(I) \otimes X \to F(X)$ so aus:

$i_X^F \left(\sum_i b_i \otimes x_i \right) = \sum_i F(\hat{x}_i)\, b_i$. Sie ist injektiv und hat dichtes Bild, vgl. V.L.Levin.)

Das Tensorprodukt $G \hat{\otimes}_{\underline{K}} F$ ist definiert als

$\left(\sum_{X \in \underline{K}} G(X) \hat{\otimes} F(X) \right) / N$, wobei

Σ das Coprodukt in $\underline{B}$ ist und N der abgeschlossene Teilraum davon, der von allen Elementen der Gestalt

$$(*) \qquad \sum_i G(\varphi)\, g_Y^i \otimes f_X^i - \sum_i g_Y^i \otimes F(\varphi)\, f_X^i \qquad , \varphi : X \longrightarrow Y$$

und $\sum_i g_Y^i \otimes f_X^i \in G(Y) \otimes F(X)$, $X, Y \in \underline{K}$, erzeugt wird.

<u>Lemma:</u> Für jedes $X \in \underline{K}$ ist die Abbildung

$\pi_X : G(I) \otimes X' \otimes F(I) \otimes X \longrightarrow G(X) \hat{\otimes} F(X)$, $\pi_X\left(\sum_i a_i \otimes \xi_i \otimes b_i \otimes \eta_i \right) = \sum_i G(\xi_i) a_i \otimes F(\hat{\eta}_i) b_i$, also $\pi_X = i_X^G \otimes i_X^F$, injektiv und hat dichtes Bild.

<u>Beweis:</u> Zunächst zeigen wir: hat dichtes Bild.

Sei $u \in G(X) \hat{\otimes} F(X)$ und $\varepsilon > 0$ gegeben.

Es existiert $v \in G(X) \otimes F(X)$, $v = \sum_{k=1}^{n} g_k \otimes f_k$, sodaß $\|u-v\|_{G(X)\hat{\otimes}F(X)} \leqslant \varepsilon/2$.

Für jedes g_k existiert $\sum_{i=1}^{m_k} a_i^k \otimes \xi_i^k \in G(I) \otimes X'$ mit

$$\| g_k - \sum_{i=1}^{m_k} G(\xi_i^k)\, a_i^k \|_{G(X)} \leqslant \frac{\varepsilon}{4n \|f_k\|_{F(X)}} .$$

Für jedes f_k existiert $\sum_{j=1}^{r_k} b_j^k \otimes \eta_j^k \in F(I) \otimes X$ mit

$$\| f_k - \sum_{j=1}^{r_k} F(\hat{\eta}_j^k) b_j^k \|_{F(X)} \leqslant \frac{\varepsilon}{4n \| \sum_{i=1}^{m_k} G(\xi_i^k) a_k \|_{G(X)}} .$$

Damit gilt für $w \in G(I) \otimes X' \otimes F(I) \otimes X$,

$$w = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{m_k} a_i^k \otimes \xi_i^k\Big) \otimes \Big(\sum_{j=1}^{r_k} b_j^k \otimes \eta_j^k\Big) :$$

$$\| v - \pi_X(w) \|_{G(X)\hat{\otimes}F(X)} =$$

$$= \Big\| \sum_{k=1}^{n} g_k \otimes f_k - \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{m_k} G(\xi_i^k) a_i^k\Big) \otimes \Big(\sum_{j=1}^{r_k} F(\hat{\eta}_j^k)\, b_j^k\Big) \Big\|_{G(X)\hat{\otimes}F(X)}$$

$$\leqslant \Big\| \sum_{k=1}^{n} g_k \otimes f_k - \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{m_k} G(\xi_i^k) a_i^k\Big) \otimes f_k \Big\|_{G(X)\hat{\otimes}F(X)} +$$

$$+ \Big\| \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{m_k} G(\xi_k^k) a_i^k\Big) \otimes f_k - \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{m_k} G(\xi_i^k) a_i^k\Big) \otimes \Big(\sum_{j=1}^{r_k} F(\hat{\eta}_j^k) b_j^k\Big) \Big\|_{G(X)\hat{\otimes}F(X)}$$

$$= \Big\| \sum_{k=1}^{n} \Big(g_k - \sum_{i=1}^{m_k} G(\xi_i^k) a_i^k\Big) \otimes f_k \Big\|_{G(X)\hat{\otimes}F(X)} +$$

$$+ \Big\| \sum_{k=1}^{n} \Big[\sum_{i=1}^{m_k} G(\xi_i^k) a_i^k\Big] \otimes \Big[f_k - \sum_{j=1}^{r_k} F(\hat{\eta}_j^k) b_j^k\Big] \Big\|_{G(X)\hat{\otimes}F(X)}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \| g_k - \sum_{i=1}^{m_k} G(\xi_i^k)\, a_i^k \|_{G(X)} \, \| f_k \|_{F(X)}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \Big\| \sum_{i=1}^{m_k} G(\xi_i^k)\, a_i^k \Big\|_{G(X)} \Big\| f_k - \sum_{j=1}^{r_k} F(\hat{\eta}_j^k) b_j^k \Big\|_{F(X)}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_{F(X)} \frac{\varepsilon}{4n\,\|f_k\|} \quad +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \Big\|\sum_{i=1}^{m_k} G(\xi_i^k) a_i^k \Big\|_{G(X)} \frac{\varepsilon}{4n\Big\|\sum\limits_{i=1}^{m_k} G(\xi_i^k)\, a_i^k\Big\|}$$

$$= \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2 \ .$$

Insgesamt erhalten wir:

$$\|u - \pi_X(w)\|_{G(X)\hat{\otimes} F(X)} \leqslant \|u-v\| + \|v - \pi_X(w)\| \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \ ,$$

also hat π_X dichtes Bild in $G(X)\hat{\otimes} F(X)$.

Jetzt zeigen wir, daß π_X injektiv ist.

Angenommen, es existiert ein $w = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes \xi_i \otimes b_i \otimes \eta_i \in G(I) \otimes X' \otimes F(I) \otimes X$ mit $\pi_X(w) = 0$, aber $w = 0$. Die Darstellung sei so gewählt, daß (a_i) und (b_i) linear unabhängig sind.

Sei $x \in X$; $\hat{x}: I \longrightarrow X$, $G(\hat{x}) : G(X) \longrightarrow G(I)$.

Sei $x' \in X'$; $x': X \longrightarrow I$, $F(x') : F(X) \longrightarrow F(I)$.

Für alle $x \in X$ und $x' \in X'$ ist $G(x) \otimes F(x') : G(X) \hat{\otimes} F(X) \longrightarrow G(I) \hat{\otimes} F(I)$ linear und durch $\|x\|\,\|x'\|$ beschränkt.

Daher gilt:

$$\begin{aligned}
0 &= \big(G(\hat{x}) \otimes F(x')\big)\pi_X(w) \\
&= \big(G(x) \otimes F(x')\big) \Big(\sum_i G(\xi_i)\, a_i \otimes F(\hat{\eta}_i) b_i \Big) \\
&= \sum_i G(\xi_i \circ \hat{x}) a_i \otimes F(x' \circ \hat{\eta}_i) b_i \\
&= \sum_i \langle x, \xi_i \rangle \langle \eta_i, x' \rangle \ a_i \otimes b_i \qquad \text{wie in (I.1).}
\end{aligned}$$

Weil (a_i) l.u. und (b_i) l.u. sind, ist auch $(a_i \otimes b_i)$ l.u., also ist $\langle x, \xi_i \rangle \langle \eta_i, x' \rangle = 0$ für alle $x \in X$ und $x' \in X'$; daraus folgt:

$\xi_i = 0$ oder $\eta_i = 0$ für alle i, also $v = 0$, im Widerspruch zur Annahme.

qed.

Für jedes $X \in \underline{K}$ ist also $G(I) \otimes X' \otimes F(I) \otimes X$ ein dichter Teilraum von $G(X) \hat{\otimes} F(X)$, also ist die algebraische direkte Summe

$$\sum_{X \in \underline{k}}^{a} G(I) \otimes X' \otimes F(I) \otimes X \quad \text{(nur endlich viele Koordinaten} \neq 0)$$

dichter Teilraum von $\sum\limits_{X \in \underline{K}} G(X) \hat{\otimes} F(X)$; denn sei $u \in \sum\limits_{X \in \underline{K}} G(X) \hat{\otimes} F(X)$, dann ist u an höchstens abzählbar vielen Koordinaten $X \in \underline{K}$ $\neq 0$ in $G(X) \hat{\otimes} F(X)$. Dort kann man aber bei entsprechender Nummerierung n der Koordinaten bis auf $\varepsilon/4n^2$ an die Koordinate von u heran, also in der Summe bis auf $\sum\limits_{n=1}^{N} \varepsilon/4n^2 < \varepsilon/2$, wenn man mit N so groß wird, daß die Norm über den Rest von $u \leq \varepsilon/2$ wird.

$G \underset{\underline{K}}{\hat{\otimes}} F = (\sum\limits_{X \in \underline{K}} G(X) \hat{\otimes} F(X))/N$. Wir wollen nachschauen, wie

$\pi(M) = N \cap \sum\limits_{X \in \underline{K}}^{a} \pi_X(G(I) \otimes X' \otimes F(I) \otimes X)$ aussieht:

$\pi(M)$ wird erzeugt von allen Elementen der Form (*), wobei aber

$\sum\limits_k g_Y^k \otimes f_X^k \in \iota_Y^G(G(I) \otimes X') \otimes \iota_X^F(F(I) \otimes X)$ ist und $\varphi: X \longrightarrow Y$ alle $\underline{K}$-Morphismen durchläuft. Sei also $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \otimes \xi_i^Y \otimes b_i \otimes \eta_i^X \in G(I) \otimes Y' \otimes F(I) \otimes X$ und $\varphi: X \longrightarrow Y$ beliebig. Dann wird $\pi(M)$ aufgespannt durch Elemente der Gestalt:

$$\sum_{i=1}^{n} G(\varphi)\, G(\xi_i^Y) a_i \otimes F(\hat{\eta}_i^X) b_i - \sum_i G(\xi_i^Y)\, a_i \otimes F(\varphi)\, F(\hat{\eta}_i^X) b_i =$$

$$= \sum_i G(\xi_i^Y \circ \varphi) a_i \otimes F(\hat{\eta}_i^X)\, b_i - \sum_i G(\xi_i^Y) a_i \otimes F(\varphi \circ \hat{\eta}_i^X) b_i$$

$$= \sum_i G(\varphi'(\xi_i^Y)) a_i \otimes F(\hat{\eta}_i^X) b_i - \sum_i G(\xi_i^Y) a_i \otimes F(\widehat{\varphi(\eta_i^X)}) b_i .$$

M selbst wird daher in $\sum\limits_{X \in \underline{K}}^{a} G(I) \otimes X' \otimes F(I) \otimes X$ erzeugt durch Elemente der Form

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes \varphi'(\xi_i^Y) \otimes b_i \otimes \eta_i^X - \sum_i a_i \otimes \xi_i^Y \otimes b_i \otimes \varphi(\eta_i^X).$$

Wir betrachten die linare Abbildung

$$\Pi_X = 1_{G(I)} \otimes 1_{F(I)} \otimes Tr_X$$

$$\Pi_X : G(I) \otimes X' \otimes F(I) \otimes X \longrightarrow G(I) \otimes F(I)$$

$$\Pi_X \, (a \otimes \xi \otimes b \otimes \eta) = \langle \eta , \xi \rangle \, a \otimes b$$

und dazu die Summenabbildung

$$\Pi = \sum_{X \in \underline{K}}^{a} \Pi_X : \sum_{X \in \underline{K}}^{a} G(I) \otimes X' \otimes F(I) \otimes X \longrightarrow G(I) \hat{\otimes} F(I).$$

<u>Lemma:</u> $\ker \Pi = M$ und Π ist surjektiv.

<u>Beweis:</u> $M \subseteq \ker \Pi$:

$$\Pi \Big(\sum_i a \otimes \varphi'(\xi_i^Y) \otimes b_i \otimes \eta_i^X - \sum_i a_i \otimes \xi_i^Y \otimes b_i \otimes \varphi(\eta_i^X) \Big) =$$

$$= \sum_i \langle \eta_i^X, \varphi'(\eta_i^Y) \rangle \, a_i \otimes b_i - \sum_i \langle \varphi(\eta_i^X), \xi_i^Y \rangle \, a_i \otimes b_i = 0.$$

$\ker \Pi \subseteq M$:

Sei $w = \Big(\big(\sum_{i=1}^{n_X} a_i^X \otimes \xi_i^X \otimes b_i^X \otimes \eta_i^X \big)_{X \in \underline{K}} \Big) \in$

$$\in \sum_{X \in \underline{K}}^{a} G(I) \otimes X' \otimes F(I) \otimes X.$$

Dann sind nur für endlich viele $X \in \underline{K}$ die Koordinaten von w von Null verschieden, z.B. für $X_1, \dots, X_N$. Wir schreiben

$w = \sum^{N} \sum^{n_j} a_i^j \otimes \xi_i^j \otimes b_i^j \otimes \eta_i^j$, wobei $\sum^{n_j} a_i^j \otimes \xi_i^j \otimes b_i^j \otimes \eta_i^j$ das

$w = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n_j} a_i^j \otimes \xi_i^j \otimes b_i^j \otimes \eta_i^j$, wobei $\sum_{i=1}^{n_j} a_i^j \otimes \xi_i^j \otimes b_i^j \otimes \eta_i^j$ das

Element von $\sum_{X \in \underline{K}}^{a} G(I) \otimes X' \otimes F(I) \otimes X$ darstellen soll, das an den Koordinaten $X \neq X_j$ immer 0 ist.

Sei w noch $\in \ker \Pi$, also

$$\Pi(w) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} \langle \eta_i^j, \xi_i^j \rangle a_i^j \otimes b_i^j = 0 \text{ in } G(I) \otimes F(I).$$

Für $x \in X$ ist $\hat{x} : I \longrightarrow X$, $(\hat{x})' : X' \longrightarrow I$, und zwar ist $(\hat{x})'(x') = \langle x, x' \rangle$ für $x' \in X'$. Wir nehmen noch den algebraischen Isomorphismus

$\sum_{j=1}^{N} G(I) \otimes X_j' \otimes F(I) \otimes X = G(I) \otimes F(I) \otimes (\sum_j X_j' \otimes X_j)$ zur Kenntnis, der in der folgenden Rechnung bewirkt, daß die formale Summe über die j zu einer Addition in I wird, dann können wir schreiben:

$0 = \Pi(w) \otimes 1 \otimes 1 \in G(I) \otimes I \otimes F(I) \otimes I.$

$$\begin{aligned} w &= \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n_j} a_i^j \otimes \xi_i^j \otimes b_i^j \otimes \eta_i^j - \Pi(w) \otimes 1 \otimes 1 \\ &= \sum_j \sum_i a_i^j \otimes \xi_i^j \otimes b_i^j \otimes \hat{\eta}_i^j(1) - \sum_j \sum_i \langle \eta_i^j, \xi_i^j \rangle a_i^j \otimes 1 \otimes b_i^j \otimes 1 \\ &= \sum_j \sum_i a_i^j \otimes \xi_i^j \otimes b_i^j \otimes \hat{\eta}_i^j (1) - \sum_j \sum_i a_i^j \otimes (\hat{\eta}_i^j)' (\xi_i^j) \otimes b_i^j \otimes 1 \quad \in M. \end{aligned}$$

Π ist surjektiv, denn schon $\Pi_I : G(I) \otimes I' \otimes F(I) \otimes I \longrightarrow G(I) \otimes F(I)$ ist surjektiv. ged.

Über die Abbildung Π finden wir daher eine bijektive lineare Abbildung zwischen $A = \sum^{a}_{X \in \underline{K}} G(I) \otimes X' \otimes F(I) \otimes X /_M$ und $G(I) \otimes F(I)$, und A ist Bild unter der Quotientenabbildung $\sum_{X \in \underline{K}} G(X) \hat{\otimes} F(X) \rightarrow \sum_{X \in \underline{K}} G(X) \hat{\otimes} F(X) /_N = G \hat{\otimes}_{\underline{K}} F$

von dichten Teilraum $\sum^{a}_{X \in \underline{K}} G(I) \otimes X' \otimes F(I) \otimes X$. Daher können wir $G(I) \otimes F(I)$ mit einem dichten Teilraum von $G \hat{\otimes}_{\underline{K}} F$ identifizieren, und wir wollen die Norm untersuchen, die vom $G \hat{\otimes}_{\underline{K}} F$ auf $G(I) \otimes F(I)$ induziert wird. Sie heiße μ.

<u>Lemma:</u> $\mu \geq \lambda$.

<u>Beweis:</u> Sei $a' \in G(I)'$, $b' \in F(I)'$.

Sei $V^{a'\otimes b'} : \sum\limits_{X\in \underline{K}}^{a} G(I) \otimes X' \otimes F(I) \otimes X \longrightarrow I$ definiert durch

$$V^{a'\otimes b'}\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n_X} a_i^X \otimes \xi_i^X \otimes b_i^X \otimes \eta_i^X\Big)_{X \in \underline{K}}\Big) =$$

$$= \sum_{X\in \underline{K}} \sum_{i=1}^{n_X} \langle a_i^X, a'\rangle \langle b_i^X, b'\rangle \langle \eta_i^X, \xi_i^X\rangle .$$

Dann ist $V^{a'\otimes b'}$ eine Linearform auf $\sum\limits_{X\in\underline{K}} G(I)\otimes X' \otimes F(I) \otimes X$, die M in ihrem Kern enthält, sie läßt sich also über

$$\begin{tikzcd}
\sum\limits_{X\in\underline{K}} G(I)\otimes X'\otimes F(I)\otimes X \arrow[rr, "V^{a'\otimes b'}"] \arrow[d, "\pi"'] & & I \\
G(I)\otimes F(I) \arrow[urr, "W^{a'\otimes b'}"'] & &
\end{tikzcd}$$

zu $W^{a'\otimes b'} : G(I)\otimes F(I) \longrightarrow I$ faktorisieren, wobei

$W^{a'\otimes b'} \big(\sum\limits_i a_i \otimes b_i\big) = \sum\limits_i \langle a_i, a'\rangle \langle b_i, b'\rangle$ gilt.

Angenommen, wir wissen schon, daß $V^{a'\otimes b'}$ stetig ist in der von $\sum\limits_{X\in\underline{K}} G(X) \hat{\otimes} F(X)$ induzierten Norm, dann gilt nach Definition der Quotientennorm auf $G \hat{\otimes}_{\underline{K}} F$, die μ induziert, $\|V^{a'\otimes b'}\| = \|W^{a'\otimes b'}\|$.

Sei zunächst $X \in \underline{K}$ festgehalten.

Wir betrachten $V^{a'\otimes b'} : G(I)\otimes X' \otimes F(I) \otimes X \longrightarrow I$, wir untersuchen die Stetigkeit in der von $G(X) \hat{\otimes} F(X)$ induzierten Norm.

Sei α_X, die von $G(X)$ auf $G(I)\otimes X'$ induzierte Norm, β_X die von $F(X)$ auf $F(I)\otimes X$. Dann gilt $\gamma \geq \alpha \geq \lambda$ und $\gamma \geq \alpha \geq \lambda$ ($\alpha = \alpha_X$ für X fest), wobei γ die größte Crossnorm ist.

$\phi_\beta^\lambda : F(I)\,\overline{\otimes}_\beta X = F(X) \longrightarrow F(I)\,\hat{\hat{\otimes}}\, X$ ist auf $F(I)\otimes X$ die Identität und hat $\|\phi_\beta^\lambda\| \leqslant 1$,

$b'\,\hat{\hat{\otimes}}\, 1_X : F(I)\,\hat{\hat{\otimes}}\, X \longrightarrow I\,\hat{\hat{\otimes}}\, X = X$ ist eine stetige Abbildung mit Norm $\|b'\,\hat{\hat{\otimes}}\, 1_X\| \leqslant \|b'\|$, da $\hat{\hat{\otimes}}$ ein Funktor ist (vgl. V.L. Levin).

Sei $F(I)\otimes_\beta X$ der normierte Raum $(F(I)\otimes X, \beta)$. Die analogen Überlegungen gelten für $G(I)\otimes X'$ und α. Damit können wir

$$V^{a'\otimes b'} : (G(I)\ \overline{\otimes}_\alpha X')\,\hat{\otimes}\,(F(I)\ \overline{\otimes}_\beta X) \longrightarrow I$$

zerlegen in

$$\begin{tikzcd}
(G(I)\,\overline{\otimes}_\alpha X')\ \hat{\otimes}\ (F(I)\,\overline{\otimes}_\beta X) \arrow[d, "\phi_\alpha^\lambda\,\hat{\otimes}\,\phi_\beta^\lambda"] \\
(G(I)\,\hat{\hat{\otimes}}\, X')\ \hat{\otimes}\ (F(I)\,\hat{\hat{\otimes}}\, X) \arrow[d, "(a'\hat{\hat{\otimes}}X')\hat{\otimes}(b'\hat{\hat{\otimes}}X)"] \\
(I\,\hat{\hat{\otimes}}\, X')\ \hat{\otimes}\ (I\,\hat{\hat{\otimes}}\, X) \arrow[d, equal] \\
X'\hat{\otimes} X \arrow[d, "Tr_X"] \\
I
\end{tikzcd}$$

und es gilt:

$$\|\phi_\alpha^\lambda\,\hat{\otimes}\,\phi_\beta^\lambda\| \leqslant \|\phi_\alpha^\lambda\|\,\|\phi_\beta^\lambda\| \leqslant 1$$

$$\|(a'\hat{\hat{\otimes}}X')\hat{\otimes}(b'\hat{\hat{\otimes}}X)\| \leqslant \|a'\hat{\hat{\otimes}}X'\|\cdot\|b'\hat{\hat{\otimes}}X\| \leqslant \|a'\|\,.\,\|b'\|,\ \|Tr\| = 1$$

also insgesamt $\|V^{a'\otimes b'}\| \leqslant \|a'\|\,.\,\|b'\|$ in der Norm von $G(X)\hat{\otimes}F(X)$; das gilt auch auf $\sum_{X\in \underline{K}} G(X)\hat{\otimes}F(X)$ nach der Definition des Coprodukts in $\underline{B}_1$.

und $\|W^{a'\otimes b'}\| = \|V^{a'\otimes b'}\| \leqslant \|a'\|\,.\,\|b'\|$.

für $W^{a'\otimes b'} : G(I)\otimes_\mu F(I) \longrightarrow I$.

Somit ist für $a' \in G(I)'$, $b' \in F(I)'$

$W^{a' \otimes b'} \in (G(I) \bar{\otimes}_\mu F(I))'$ und $\| W^{a' \otimes b'} \| \leqslant \| a' \| \| b' \|$.

Mit diesem Hilfsmittel können wir die Abschätzung $\mu \geqslant \lambda$ in Angriff nehmen:

Sei $\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \in G(I) \otimes F(I)$.

$$\begin{aligned}
\mu \Big(\sum_i a_i \otimes b_i \Big) &= \sup_{f \in (G(I) \bar{\otimes}_\mu F(I))',\ \|f\| \leqslant 1} \Big| f\Big(\sum_i a_i \otimes b_i \Big) \Big| \\
&\geqslant \sup_{\|a'\| \leqslant 1,\ \|b'\| \leqslant 1} \Big| W^{a' \otimes b'} \Big(\sum_i a_i \otimes b_i \Big) \Big| \\
&= \sup_{\substack{a' \in G(I)',\ b' \in F(I)' \\ \|a'\| \leqslant 1,\ \|b'\| \leqslant 1}} \Big| \sum_i \langle a_i, a' \rangle \langle b_i, b' \rangle \Big| \\
&= \lambda \Big(\sum_i a_i \otimes b_i \Big)
\end{aligned}$$

qed.

<u>Lemma:</u> μ ist Crossnorm, also $\mu \leqslant \gamma$

<u>Beweis:</u> $a \otimes b \in G(I) \otimes F(I)$.

$\mu(a \otimes b) \geqslant \lambda(a \otimes b) = \|a\| . \|b\|$ ist die Abschätzung nach unten.

Die nach oben führen wir wie folgt durch:

$$\begin{aligned}
\mu(a \otimes b) &= \inf_{m \in M} \| a \otimes 1 \otimes b \otimes 1 - m \|_{\sum_{X \in \underline{k}} G(X) \hat{\otimes} F(X)} \\
&\leqslant \| a \otimes 1 \otimes b \otimes 1 \|_{\sum_{X \in \underline{k}} G(X) \hat{\otimes} F(X)} \\
&= \| a \otimes 1 \otimes b \otimes 1 \|_{G(X) \hat{\otimes} F(X)} \\
&= \|a\| \, \|b\| .
\end{aligned}$$

qed.

<u>Satz:</u> Seien $G, F : \underline{K} \longrightarrow \underline{B}$ kontra - bzw. kovariant, Funktoren vom Typ Σ. Dann ist

$G \hat{\otimes}_{\underline{K}} F = G(I) \bar{\otimes}_{\mu} F(I)$, die Vervollständigung von $G(I) \otimes F(I)$ in einer Crossnorm $\mu \geqslant \lambda$. Wenn $G^1, F^1 : \underline{K} \longrightarrow \underline{B}$ kontra- bzw. kovariant und $\eta : G \to G^1$, $\omega : F \to F^1$ natürliche Transformationen sind, dann sieht $\eta \otimes \omega : G \hat{\otimes}_{\underline{K}} F \to G^1 \hat{\otimes}_{\underline{K}} F^1$ so aus:

$$\begin{tikzcd}
G \hat{\otimes}_{\underline{K}} F \arrow[rr, "\eta \hat{\otimes} \omega"] \arrow[dr, "\overline{\eta \hat{\otimes} \omega}"'] & & G^1 \hat{\otimes}_{\underline{K}} F^1 \\
& G^1{}_e \hat{\otimes}_{\underline{K}} F^1{}_e \arrow[ur, "i \otimes j"'] &
\end{tikzcd}$$

wobei $i : G^1{}_e \longrightarrow G^1$, $j : F^1{}_e \longrightarrow F^1$ die Einbettungen der wesentlichen Teilfunktoren sind und

$$\overline{\eta \hat{\otimes} \omega} = \eta_I \otimes \omega_I : G(I) \bar{\otimes}_{\mu} F(I) \longrightarrow G^1_e(I) \bar{\otimes}_{\mu_1} F^1{}_e(I).$$

<u>Beweis:</u> Den ersten Teil haben wir schon in vielen Lemmas bewiesen, der zweite Teil folgt leicht aus (I.1) und dem Ergebnis von V.L. Levin (analog zu (I.1) für kovariante Funktoren) und der Tatsache, daß

$\hat{\otimes}_{\underline{K}} : \mathrm{Funkt}_{\mathrm{kontra}} (\underline{K}, \underline{B}) \times \mathrm{Funkt}_{\mathrm{ko}} (\underline{K}, \underline{B}) \to \underline{B}$ ein zulässiger Funktor ist, das heißt linear und Kontraktion auf den Morphismenräumen (vgl. Cigler). qed.

(I.3) <u>Das Tensorprodukt mit Σ_A</u>

$\underline{K}$ sei wieder eine volle Teilkategorie von $\underline{B}$ mit $I \in \underline{K}$.

<u>Satz:</u> Sei $\underline{F}:\underline{K}\to\underline{B}$ ein kovarianter Funktor vom Typ Σ und $G = \Sigma_A(.')|_{\underline{K}}$ für $A \in \underline{B}$. Dann ist

$$G \mathop{\hat{\otimes}}_{\underline{K}} F = A \hat{\otimes} F(I).$$

<u>Beweis:</u> Nach (I.2) ist $G \mathop{\hat{\otimes}}_{\underline{K}} F = G(I) \overline{\otimes}_{\mu} F(I) = A \overline{\otimes}_{\mu} F(I)$ und $\mu \geqslant \mu \geqslant \lambda$.

Wir zeigen $\mu \geqslant \mu$ und verwenden dazu die Notation von (I.2) und die Tatsache, daß $(A \hat{\otimes} F(I))' = H(A,F(I)')$ ist.

Sei $u = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \in A \otimes F(I)$.

Nach Hahn-Banach existiert ein $g \in H(A,F(I)')$ mit $\|g\| = 1$, für das

$$|<u,g>| = |\sum_{i=1}^{n} <b_i, g(a_i)>| = \|u\|_{A\hat{\otimes}F(I)} \text{ gilt.}$$

g definiert aber ein lineares Funktional auf $\sum_{X\in\underline{K}} A\hat{\otimes}X'\hat{\otimes}F(X)$ mit Norm $\leqslant 1$ durch

$$\langle v, g\circ\pi\rangle = \sum_{k,X\in\underline{K}} \langle F(\xi_X^k)\, f_X^k, g(a_X^k)\rangle \qquad \text{für}$$

$$v = \Big(\sum_k a_X^k \otimes \xi_X^k \otimes f_X^k\Big)_{X\in\underline{K}} \in \sum_{X\in\underline{K}}{}^{\alpha} A\otimes X'\otimes F(X).$$

$$|\langle v, g\circ\pi\rangle| \leqslant \sum_{k,X\in\underline{K}} \|\xi_X^k\|\ \|f_X^k\|\ \|a_X^k\|,$$ und das gilt für jede Darstellung von v, also gilt

$$|<v, g\circ\pi>| \leqslant \|v\|_{\sum_{X\in\underline{K}} A\hat{\otimes}X'\hat{\otimes}F(X)}.$$

Sei $v \in \sum_{X\in\underline{K}} A\hat{\otimes}X'\hat{\otimes}F(X)$ so, daß $u = \pi(v)$ gilt

(z.B. $v = ((\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes 1 \otimes b_i \otimes 1)\,\delta_{X,I})_{X\in\underline{K}}$.

Dann gilt:

$$\|u\|_{A\hat{\otimes}F(I)} = |<u, g>| = |<\pi(v), g>| = |<v, g\circ\pi>|$$

$$\leqslant \|v\|_{\sum_{X\in\underline{K}} A\hat{\otimes}X'\hat{\otimes}F(X)}$$

Also gilt nach Definition der Quotientennorm μ auf $A\otimes F(I)$ $\mu \geqslant \mu$. qed.

II. Die Adjungierten der Einschränkungsfunktoren

Sei $F : \underline{K} \to \underline{B}$ ein Funktor, definiert auf einer vollen Teilkategorie von $\underline{B}$. Welche Erweiterungen von F auf Oberkategorien $\underline{L} \supseteq \underline{K}$ gibt es, welche kann man konstruktiv angeben und welche sind darunter besonders ausgezeichnet? Diesem Problemkreis , der auch die Frage nach Erweiterungen von Operatoridealen umfaßt (vgl. Pietsch) ist das folgende Kapitel gewidmet. Die Methode ist kategorientheoretisch: Wir betrachten die Einschränkungsfunktoren $F \mapsto F/\underline{K}$, $F \mapsto (F/\underline{K})_e$, $F : \underline{L} \to \underline{B}$, $\underline{L} \supseteq \underline{K}$ und zeigen, daß beide Funktoren zwischen den Funktorkategorien sowohl Rechts- als auch Linksadjungierte besitzen; dabei spielt die Bedingung $\underline{L} \subseteq \underline{\mathbf{A}}$ eine gewisse Rolle ($\underline{A}$ ... Grothendieckräume). Wir berechnen auch die Einheiten der Adjunktionen.

(II.1) Der Einschränkungsfunktor und seine Adjungierten

$\underline{K}$ und $\underline{L}$ seien volle Teilkategorien von $\underline{B}$, $\underline{K} \subseteq \underline{L}$, sonst beliebig. Wir betrachten den Einschränkungsfunktor $(.)|\underline{K} : \mathrm{Funkt}\,(\underline{L},\underline{B}) \to \mathrm{Funkt}\,(\underline{K},\underline{B})$, der durch $F \mapsto F/\underline{K}$ auf den Objekten und durch $(\varphi_X)_{X\in\underline{L}} \mapsto (\varphi_X)_{X\in\underline{K}}$ auf Morphismen definiert ist, auf denen er linear und Kontraktion ist. Wir wollen dazu den Rechts- und den Linksadjungierten Funktor: $\mathrm{Funkt}(\underline{K},\underline{B}) \to \mathrm{Funkt}\,(\underline{L},\underline{B})$ bestimmen.

<u>Satz 1:</u> Sei $F : \underline{K} \to \underline{B}$ ein kovarianter Funktor und $H : \underline{K} \times \underline{L} \to \underline{B}$ der entsprechend eingeschränkte *Hom* -Funktor.
Dann ist $H \hat{\otimes}_{\underline{K}} F$ ein kovarianter Funktor ${}^{\underline{L}}F : \underline{L} \to \underline{B}$ und $({}^{\underline{L}}F)|\underline{K} = F$.

<u>Beweis:</u> Sei $A \in \underline{L}$. Dann ist

$H \hat{\otimes}_{\underline{K}} F(A) = H^A \hat{\otimes} F = \sum_{X \in \underline{K}} H(A,X) \hat{\otimes} F(X) / N_{\underline{K}}$ ein Banachraum, wenn es Menge ist. Ob das eine Menge ist, ist ein grundlagentheoretisches Problem, das uns nicht weiter interessiert; wir nehmen das einfach an.

Wenn $f: A \to B$ in $\underline{L}$ ein Morphismus ist, dann ist $H(.,f) : H(.,A) \to H(.,B)$ eine natürliche Transformation, also gilt nach Satz 1 von Cigler:

$H \hat{\otimes} F(f) := H(.,f) \hat{\otimes} 1_F : H(.,A) \hat{\otimes} F \to H(.,B) \hat{\otimes} F$ ist ein $\underline{B}$-Morphismus mit Norm $\leq \|f\|$. Aus dem Beweis von Satz 1 bei Cigler und der dort angegebenen Gestalt von $H(.,f) \hat{\otimes} 1_F$:

$$H(.,f) \hat{\otimes} 1_F \ (g \otimes x) = H(X,f) \ (g) \otimes 1_{F(X)} \ (x)$$
$$= f \circ g \otimes x \ , \ g \otimes x \in H(X,A) \hat{\otimes} F(X)$$

folgt : $H \hat{\otimes}_{\underline{K}} F(f \circ h) = H \hat{\otimes}_{\underline{K}} F(f) \circ H \hat{\otimes}_{\underline{K}} F(h)$ und $H \hat{\otimes}_{\underline{K}} F(1_A) = 1$ auf $H \hat{\otimes}_{\underline{K}} F(A)$ für $h: B \to C$ und $f \mapsto H \hat{\otimes}_{\underline{K}} F(f)$ ist linear und eine Kontraktion.

Wenn $X \in \underline{K}$ ist, dann folgt aus Satz 2 von Cigler, daß $H(.,X) \hat{\otimes}_{\underline{K}} F = F(X)$ ist: man benötigt im Beweis $1_X \in \underline{K}$. Aus der Gestalt der dort angegebenen Abbildung π folgt, daß $H \hat{\otimes}_{\underline{K}} F(f) = F(f)$ ist für $f: X \to Y$ in $\underline{K}$.

qed.

Ganz analog gilt folgender

<u>Satz 2:</u> $G : \underline{K} \to \underline{B}$ sei ein kontravarianter Funktor und $H: \underline{L} \times \underline{K} \to \underline{B}$ der Hom-Funktor. Dann $G \hat{\otimes}_{\underline{K}} H$ ein kontravarianter Funktor $^{\underline{L}}G: \underline{L} \to \underline{B}$ und $(^{\underline{L}}G) | \underline{K} = G$.

Der Funktor $F \mapsto {}^{\underline{L}}F$ soll später der Linksadjungierte werden. Wir machen uns jetzt an die Konstruktion der Rechtsadjungierten:

<u>Satz 3:</u> $F:\underline{K} \to \underline{B}$ sei ein kovarianter Funktor und $H:\underline{L} \times \underline{K} \to \underline{B}$ der Hom-Funktor. Dann ist $\underset{\underline{K}}{\text{n.t.}}\ H(H,F) = \underset{\underline{K}}{\overset{(.)}{\text{n.t.}}} H(H(..,.),F(.))$ ein kovarianter Funktor $F^{\underline{L}}:\underline{L} \to \underline{B}$ und $(F^{\underline{L}})|\underline{K} = F$.

<u>Beweis:</u> Sei $A \in \underline{L}$. Dann ist

$F^{\underline{L}}(A) = \underset{\underline{K}}{\text{n.t.}} H(H_A,F)$ ein Banachraum, denn es ist nach Linton (1.5) sogar eine Menge.

Für $f:A \to B$ in $\underline{L}$ ist

$F^{\underline{L}}(f) = \underset{\underline{K}}{\overset{(.)}{\text{n.t.}}} H(H(f,.),F(.)) : \underset{\underline{K}}{\text{n.t.}} H(H_A,F) \to \underset{\underline{K}}{\text{n.t.}} H(H_B,F)$ ein $\underline{B}$-Morphismus mit Norm $\leq \|f\|$ und auch alle anderen Eigenschaften eines Funktors sind erfüllt.

Wenn $X \in \underline{K}$ ist, dann ist $\underset{\underline{K}}{\text{n.t.}} H(H_X,F) = F(X)$, denn $1_X \in \underline{K}$ und wir können das Yonedalemma verwenden. qed.

Analog gilt der

<u>Satz 4:</u> Sei $G:\underline{K} \to \underline{B}$ kontravariant und $H:\underline{K} \times \underline{L} \to \underline{B}$ der Hom-Funktor. Dann ist $\underset{\underline{K}}{\text{n.t.}} H(H,G) = \underset{\underline{K}}{\overset{(.)}{\text{n.t.}}} H(H(.,..),G(.))$ ein kontravarianter Funktor $G^{\underline{L}}:\underline{L} \xrightarrow{\underline{L}} \underline{B}$ und $(G^{\underline{L}})|\underline{K} = G$.

Um die Adjungiertheitsrelationen beweisen zu können, benötigen wir folgende Verallgemeinerung von Satz 3 von Cigler.

<u>Satz 5:</u> Seien $\underline{K}$ und $\underline{V}$ beliebige volle Teilkategorien von $\underline{B}$ und $U:\underline{U} \to \underline{B}$, $V:\underline{V} \to \underline{B}$ kovariante Funktoren und $W:\underline{U}\times\underline{V} \to \underline{B}$ ein kontra-kovarianter Bifunktor.

Dann gilt:

(1) $\underset{\underline{V}}{\overset{(..)}{\text{n.t.}}} H(W(.,..) \underset{\underline{U}}{\overset{(.)}{\hat{\otimes}}} U(.),\ V(..)) =$

(2) $= \underset{\underline{U}}{\overset{(.)}{\text{n.t.}}} H(U(.),\ \underset{\underline{V}}{\overset{(..)}{\text{n.t.}}} H(W(.,..),\ V(..)))$

und zwar natürlich in U, V und W.

<u>Beweis:</u> Sei $\varphi \in \underset{\underline{V}}{\overset{(..)}{\text{n.t.}}} H(W(.,..) \overset{(.)}{\hat{\otimes}}_{\underline{U}} U(.),\ V(..)) = (1)$.

Für ein Objekt $v \in \underline{V}$ ist $\varphi_v \in H(W(.,v) \overset{(.)}{\hat{\otimes}}_{\underline{U}} U(.),\ V(v))$ und nach Satz 3 von Cigler gilt:

$$(*)\quad H(W(.,v) \overset{(.)}{\hat{\otimes}}_{\underline{U}} U(.),\ V(v)) = \underset{\underline{U}}{\overset{(.)}{\text{n.t.}}} H(U(.), H(W(.,v),V(v)))$$

isometrisch isomorph, gegeben durch die Zuordnung $\varphi_v \longleftrightarrow \bar{\varphi}_v$; für $u \in \underline{U}$: $(\bar{\varphi}_v)_u\,(a)(b) = \varphi_v(b \otimes a)$, $a \in U(u)$, $b \in W(u,v)$, und außerdem wissen wir, daß $u \mapsto (\bar{\varphi}_v)_u$ natürlich ist.

Sei $u \in \underline{U}$ und $a \in U(u)$ fest. Wir müssen zeigen, daß $v \mapsto (\bar{\varphi}_v)_u(a)$ natürlich ist: Sei $f\colon v \longrightarrow v'$ ein $\underline{V}$-Morphismus.

Das folgende Diagramm soll kommutativ sein:

$$\begin{tikzcd}
W(u,v) \arrow[r, "(\bar{\varphi}_v)_u(a)"] \arrow[d, "W(u,f)"'] & V(v) \arrow[d, "V(f)"] \\
W(u,v') \arrow[r, "(\bar{\varphi}_{v'})_u(a)"] & V(v').
\end{tikzcd}$$

Sei $b \in W(u,v)$. Dann ist:

$$\begin{aligned}
V(f) \circ (\bar{\varphi}_v)_u(a)(b) &= V(f) \circ \varphi_v(b \otimes a) \\
&= \varphi_{v'} \circ (W(.,f) \hat{\otimes}_{\underline{U}} U(.))\ (b \otimes a), \text{ weil } v \mapsto \varphi_v \text{ natürlich ist} \\
&= \varphi_{v'}(W(u,f)b \otimes U(1_n)a) \quad \text{nach Satz 1 von Cigler} \\
&= \varphi_{v'}(W(u,f)b \otimes a) \\
&= (\bar{\varphi}_{v'})_u(a) \circ W(u,f)(b).
\end{aligned}$$

Also ist $T\colon \varphi \longmapsto \bar{\varphi}$ als Abbildung $(1) \longrightarrow (2)$ wohldefiniert und wegen $(*)$ folgt $\|\varphi_v\| = \|\bar{\varphi}_v\|$ für alle $v \in \underline{V}$, also auch

$\|\varphi\| = \sup\limits_{v \in \underline{V}} \|\varphi_v\| = \sup\limits_{v \in \underline{V}} \|\bar{\varphi}_v\| = \|\bar{\varphi}\|$, also ist T eine Isometrie. Wir haben noch die Surjektivität von T nachzuweisen.

Sei $\psi \in (2) = \underset{\underline{U}}{\overset{(.)}{\text{n.t.}}}(U(.),\ \underset{\underline{V}}{\overset{(..)}{\text{n.t.}}}(W(.,..),\ V(..)))$.

Wir definieren $\varphi \in (1)$ durch

$\varphi_v(b\otimes a) = (\psi_u(a))_v(b)$, $a\in U(u)$, $b\in W(u,v)$, und erweitern diese Definition linear und stetig. Dann ist nach Satz 3 von Cigler jedes $\varphi_v \in H(W(.,v)\hat{\otimes} U(.),\ V(v))$ und $\|\varphi_v\| = \sup\limits_{u} \sup\limits_{\substack{\|a\|\leq 1\\ a\in U(u)}} \|\psi_u(a)_v\|$, also $\|\varphi\| = \|\psi\|$.

Wir müssen noch $v \mapsto \varphi_v$ natürlich und $T(\varphi)=\psi$ zeigen (das letztere ist trivial). Sei wieder $f:v \longrightarrow v'$ ein $\underline{V}$-Morphismus. Wir müssen das folgende Diagramm untersuchen:

$$\begin{tikzcd}
W(.,v)\hat{\otimes} U(.) \arrow[r, "\varphi_v"] \arrow[d, "W(.,f)\hat{\otimes}U(.)"'] & V(v) \arrow[d, "V(f)"] \\
W(.,v')\hat{\otimes} U(.) \arrow[r, "\varphi_{v'}"] & V(v')
\end{tikzcd}$$

Sei $b\otimes a \in W(u,v)\hat{\otimes} U(u)$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
V(f)\circ\varphi_v(b\otimes a) &= V(f)\circ(\psi_u(a))_v(b)\\
&= (\psi_u(a))_{v'}\circ W(u,f)\ (b), \text{ weil } \psi \text{ natürlich ist.}\\
&= \varphi_{v'}(W(u,f)(b)\otimes a)\\
&= \varphi_{v'}\circ(W(.,f)\hat{\otimes}U(.))\,(b\otimes a).
\end{aligned}$$

Damit ist $T:(1)\longrightarrow(2)$ ein isometrischer Isomorphismus.

Wir müssen nur noch zeigen, daß T natürlich ist in U,V und W.

Seien $\alpha: U' \longrightarrow U$ natürliche Transformation über $\underline{U}$

$\beta: V \longrightarrow V'$ nat. Transf. über $\underline{V}$

$\mu: W' \longrightarrow W$ nat. Bifunktortransf. über $\underline{U}\times\underline{V}$.

$$\begin{tikzcd}
\varphi \in \underset{\underline{V}}{\overset{(..)}{n.t.}}H(W(.,..)\underset{\underline{U}}{\overset{(.)}{\hat{\otimes}}}(.),\ V(..)) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\underset{\underline{V}}{n.t.}H(\mu\hat{\otimes}\alpha,\ \beta)"'] & \underset{\underline{U}}{\overset{(.)}{n.t.}}H(U(.),\ \underset{\underline{V}}{\overset{(..)}{n.t.}}H(W(.,..),V(..))) \arrow[d, "\underset{\underline{U}}{n.t.}H(\alpha,\underset{\underline{V}}{n.t.}H(\mu,\beta))"'] \\
\underset{\underline{V}}{\overset{(..)}{n.t.}}H(W'(.,..)\underset{\underline{U}}{\overset{(.)}{\hat{\otimes}}}U'(.),V'(..)) \arrow[r, "T'"] & \underset{\underline{U}}{\overset{(.)}{n.t.}}H(U'(.),\underset{\underline{V}}{\overset{(..)}{n.t.}}H(W'(.,..),V'(..)))
\end{tikzcd}$$

Dieses Diagramm soll kommutativ sein:

$a \in U'(u)$, $b \in W'(u,v)$, $u \in \underline{U}$, $v \in \underline{V}$.

$$\left[\underset{\underline{U}}{n.t.}H(\alpha, \underset{\underline{V}}{n.t.}H(\mu,\beta))\cdot T(\varphi)\right]_u(a)_v(b)$$

$$= \left[\left[\underset{\underline{V}}{n.t.}H(\mu,\beta)\circ T(\varphi)\circ\alpha\right]_u (a)\right]_v(b)$$

$$= \left[\underset{\underline{V}}{n.t.}H(\mu,\beta)_u \left[T(\varphi)_u\circ\alpha_u(a)\right]\right]_v(b)$$

$$= \left[\beta\circ\left[T(\varphi)_u(\alpha_u(a))\right]\circ\mu_u\right]_v(b)$$

$$= \beta_v\circ\left[T(\varphi)_u(\alpha_u(a))\right]_v(\mu_{u,v}(b))$$

$$= \beta_v\circ\varphi_v(\mu_{u,v}(b)\otimes\alpha_u(a)) \text{ nach Definition.}$$

$$\left[T'\circ \underset{\underline{V}}{n.t.}H(\mu\hat{\otimes}\alpha, \beta)\ (\varphi)\right]_u(a)_v(b) =$$

$$= T'(\beta\circ\varphi\circ\mu\hat{\otimes}\alpha)_u\ (a)_v(b)$$

$$= (\beta\circ\varphi\circ\mu\hat{\otimes}\alpha)_v(b\otimes a)$$

$$= \beta_v\circ\varphi_v(\mu_{u,v}(b)\otimes\alpha_u(a)) \text{ nach Definition.}$$

Der Satz ist vollständig bewiesen.

Dual dazu gilt folgender

<u>Satz 6:</u> Seien $\underline{U}$, $\underline{V}$ volle Teilkategorien von $\underline{B}$, $U:\underline{U}\longrightarrow\underline{B}$, $V:\underline{V}\longrightarrow\underline{B}$ kontravariante Funktoren und $W:\underline{V}\times\underline{U}\longrightarrow\underline{B}$ ein kontra-kovarianter Bifunktor. Dann gilt isometrisch isomorph.

$$\underset{\underline{V}}{\overset{(..)}{n.t.}}H(U(.)\ \overset{(.)}{\hat{\otimes}_{\underline{U}}}\ W(..,.),\ V(..)) =$$

$$= \underset{\underline{U}}{\overset{(.)}{u.t.}}H(U(.),\ \underset{\underline{V}}{\overset{(..)}{n.t.}}H(W(..,.),\ V(..)))$$

und zwar natürlich in U,V,W.

Jetzt wollen wir die Adjungiertheitsrelationen beweisen. Wir beschränken uns auf den kovarianten Fall - der kontravariante ist analog. Man beachte, daß die Funktorkategorie in zwei disjunkte Teilkategorien zerfällt : die der kovarianten und die der kontravarianten Funktoren, und daß zwischen einem kovarianten und einem kontravarianten Funktor keine natürliche Transformation existiert, also kein Morphismus in der Funktorkategorie. Seien $\underline{K} \subseteq \underline{L} \subseteq \underline{B}$ volle Teilkategorien, $F : \underline{K} \longrightarrow \underline{B}$ und $G : \underline{L} \longrightarrow \underline{B}$ seien kovariante Funktoren. Man setze: $\underline{K}=\underline{U}$, $F=U$, $\underline{L}=\underline{V}$, $G=V$ und $H=W:\underline{K} \times \underline{L} \longrightarrow \underline{B}$. Dann liefert der Satz : Es gilt isometrisch isomorph und natürlich in F und G:

$$\underset{\underline{L}}{n.t.}H(H\hat{\otimes}_{\underline{K}}F,\ G) = \underset{\underline{K}}{n.t.}H(F,\ \underset{\underline{L}}{n.t.}H(H,G))$$

und $\underset{\underline{L}}{\overset{(..)}{n.t.}}(H(.,..),\ G(..)) = G(.) = G|\underline{K}$,

weil $\underline{K}\subseteq\underline{L}$ gilt und man das Yoneda-Lemma anwenden kann.

Daher gilt natürlich in F und G:

$$\boxed{\underset{\underline{L}}{n.t.}H({}^{\underline{L}}F,G) = \underset{\underline{K}}{n.t.}H(F,G|\underline{K})},$$

also ist ${}^{\underline{L}}(.)$ linsadjungiert zu $(.)|\underline{K}$.

Setzt man hingegen $\underline{K}=\underline{V}$, $\underline{L}=\underline{U}$, $H=W:\underline{L} \times \underline{K} \longrightarrow \underline{B}$, $G=U$ und $F=V$, so erhält man, natürlich in F und G:

$$\underset{\underline{K}}{n.t.}H(H\ {}_{\underline{L}}G,F) = \underset{\underline{L}}{n.t.}H(G,\ \underset{\underline{K}}{n.t.}H(H,F))$$

und $H(.,..)\ \overset{(.)}{\hat{\otimes}}_{\underline{L}}\ G(.) = G(..) = G|\underline{K}$, weil $\underline{K}\subseteq\underline{L}$ gilt und man Satz 2 von Cigler anwenden kann.

Daher gilt natürlich in F und G:

$$\boxed{\underset{\underline{K}}{u.t.}H(G|\underline{K},F) = \underset{\underline{L}}{u.t.}H(G,F^{\underline{L}})}$$

und $(.)^{\underline{L}}$ ist rechtsadjungiert zu $(.)|\underline{K}$.

Dieselben Relationen gelten für kontravariante F und G.

(II.2) <u>Die Einheiten der Adjunktionen in (II.1)</u>

Die Einheit der Adjunktion $\mathrm{n.t.}_{\underline{L}}H({}^{L}F,G) = \mathrm{n.t.}_{\underline{K}}H(F,G|\underline{K})$ ist die natürliche Transformation $\varphi: F \longrightarrow ({}^{L}F)|\underline{K} = F$, die der Identität auf ${}^{L}F$ entspricht, wenn man in der Gleichung $G = {}^{L}F$ setzt.
Man sieht leicht, daß $\varphi = 1_F$ ist.

Die Koeinheit der Adjunktion ist die natürliche Transformation $\psi: {}^{L}(G|\underline{K}) \longrightarrow G$, die der Identität auf $G|\underline{K}$ entspricht, wenn man $F = G|\underline{K}$ setzt.
Durch Zurückeinsetzen von ${}^{L}(G|\underline{K}) = H \hat{\otimes}_{\underline{K}} (G|\underline{K})$ und $G|\underline{K} = \mathrm{n.t.}_{\underline{L}}H(H,G)$, Anwenden der Abbildung T^{-1} aus (II.1) und des Yoneda-Lemmas erhält man:

$\psi : {}^{L}(G|\underline{K}) = H \hat{\otimes}_{\underline{K}} (G|\underline{K}) \longrightarrow G$ sieht so aus:

$\psi_\ell(h \otimes g) = G(h)g$, $h \otimes g \in H(k,\ell) \hat{\otimes} G(k)$, $k \in \underline{K}$, $\ell \in \underline{L}$; das ist dieselbe Abbildung wie in Satz 2 von Cigler, nur ist hier nicht für alle $\ell \in \underline{L}$ die Abbildung 1_ℓ im Bild von $H: \underline{K} \times \underline{L} \to \underline{B}$ enthalten. Setzen wir noch zusätzlich $\underline{K} = \underline{L}$, dann wird der Einschränkungsfunktor $(.)|\underline{K}$ zur Identität auf Funkt $(\underline{L},\underline{B})$ und hat die Identität zum Linksadjungierten.
Weil je zwei Linksadjungierte natürlich äquivalent sind, stimmt in diesem Fall ${}^{L}(.)$ mit der Identität überein, also stimmt für $F: \underline{L} \to \underline{B}$ $H \hat{\otimes}_{\underline{L}} F$ mit F überein und die natürliche Äquivalenz wird eben durch die oben berechnete Koeinheit vermittelt. Da in der Abbildung der ersten Adjungiertheitsrelation Satz 2 von Cigler nicht verwendet wurde, stellt diese Überlegung einen neuen Beweis von Satz 2 von Cigler dar.

Die Einheit der Adjunktion $\underset{\underline{K}}{n.t.}H(G|\underline{K},F)=\underset{\underline{L}}{n.t.}H(G,F^{\underline{L}})$ ist die natürliche Transformation $\bar{\varphi}: G \longrightarrow (G|\underline{K})^{\underline{L}}$, die der Identität auf $G|\underline{K}$ entspricht, wenn man $F=G|\underline{K}$ setzt.

Durch Einsetzen von $(G|\underline{K})^{\underline{L}} = \underset{\underline{K}}{n.t.}(H,G|\underline{K})$, $G|\underline{K} = H \hat{\otimes}_{\underline{L}} G$ und Anwenden von T und Satz 2 von Cigler erhält man:

$\bar{\varphi}: G \longrightarrow (G|\underline{K})^{\underline{L}} = \underset{\underline{K}}{n.t.}H(H,G\ \underline{K})$ sieht so aus:

$\bar{\varphi}_\ell(g)_k(h) = G(h)g$, $g\in G(\ell)$, $h\in H(\ell,k)$, $\ell\in\underline{L}$, $k\in\underline{K}$. Für den Fall $\underline{K} = \underline{L}$ ist das die Abbildung im Yoneda-Lemma : $G \to \underset{\underline{L}}{n.t.}(H,G)$, die die natürliche Äquivalenz vermittelt. Durch Wiederholen der obigen Argumente (Eindeutigkeit des Rechtsadjungierten), erhält man auch hier einen weiteren Beweis des Yoneda Lemmas, in dem allerdings Satz 2 von Cigler verwendet wurde.

<u>Bemerkung 1:</u> Satz 2 von Cigler und das Yoneda-Lemma sind in gewisser Weise dual zueinander: $H \hat{\otimes}_{\underline{K}} F$ ist Koende des Funktors $H(.,X)\hat{\otimes} F(..):\underline{K}^{op}\times\underline{K} \longrightarrow \underline{B}$ und $\underset{\underline{K}}{n.t.}(H_Y,F)$ ist Ende des Funktors $H(H(Y,.),F(..)):\underline{K}^{op}\times\underline{K} \longrightarrow \underline{B}$ und H und $\hat{\otimes}$ sind zueinander adjungiert. Sicherlich läßt sich dieser Zusammenhang auch formal kategorientheorisch fassen (Vertauschbarkeit von Enden bzw. Koenden mit adjungierten Funktoren).

<u>Bemerkung 2:</u> Sei $G:\underline{L} \longrightarrow \underline{B}$ ein Funktor. Aus $^{\underline{L}}(G|\underline{K}) \xrightarrow{\psi} G \xrightarrow{\bar{\varphi}} (G\ \underline{K})^{\underline{L}}$ folgt, daß in gewisser Weise $^{\underline{L}}(.)$ die "minimale" und $(.)^{\underline{L}}$ die "maximale" Erweiterung darstellt.

Die Koeinheit dieser Adjunktion ist die Abbildung $\bar{\psi}: (F^{\underline{L}})|\underline{K} = F \longrightarrow F$, die der Identität auf $F^{\underline{L}}$ entspricht, wenn man $G=F^{\underline{L}}$ setzt. Wieder erhält man leicht, daß $\bar{\psi} = 1_F$ ist.

(II.3) Der wesentliche Einschränkungsfunktor und seine Adjungierten

$\underline{L} \supseteq \underline{K}$ seien wieder volle Teilkategorien von $\underline{B}$, $I \in \underline{K}$ (damit Funktoren vom Typ Σ definiert sind).

Der wesentliche Einschränkungsfunktor

$(.|\underline{K})_e$: Funkt $(\underline{L},\underline{B}) \longrightarrow$ Funkt $(\underline{K},\underline{B})$ ordnet jeden Funktor F den wesentlichen Teil $(F|\underline{K})_e$ von $F|\underline{K}$ zu. Einer natürlichen Transformation $(\varphi_X)_{X \in \underline{L}} : F \longrightarrow G$ ordnet er die natürliche Transformation $(\varphi_X | F_e(X))_{X \in \underline{K}}$ zu. Da jede natürliche Transformation wesentliche Teilfunktoren in solche abbildet, ist damit $(.|\underline{K})_e$ als Funktor wohldefiniert und wieder linear und Kontraktion auf den Morphismenräumen.

Für $X,Y \in \underline{B}$, sei $K(X,Y) = X' \hat{\hat{\otimes}} Y$ der Normabschluß der endlichdimensionalen Operatoren $X \longrightarrow Y$. Das ist ein kontra-kovarianter Bifunktor.

<u>Satz:</u> 1) $F : \underline{K} \longrightarrow \underline{B}$ sei ein kovarianter Funktor und $K : \underline{K} \times \underline{L} \longrightarrow \underline{B}$ entsprechend eingeschränkt. Dann ist $K \hat{\otimes}_{\underline{K}} F$ ein kovarianter Funktor ${}^{\underline{L}e}F : \underline{L} \longrightarrow \underline{B}$, der vom Typ Σ ist, wenn F es war.

<u>Beweis:</u> Analog zu (II.1) beweist man, daß $K \hat{\otimes}_{\underline{K}} F$ ein Funktor ist. Wenn F vom Typ Σ ist, ist für $Y \in \underline{L}: K^Y \hat{\otimes}_{\underline{K}} F = K(I,Y) \tilde{\otimes}_\mu F(I) = Y \tilde{\otimes}_\mu F(I)$ für eine Crossnorm $\mu \geqslant \lambda$ nach (I.2), weil K^Y ein kontravarianter Funktor vom Typ Σ ist. Speziell ist daher $F(I) \otimes Y$ dicht in ${}^{\underline{L}e}F(Y) = K^Y \hat{\otimes}_{\underline{K}} F$, also ${}^{\underline{L}e}F$ ein Funktor vom Typ Σ. qed.

2) Sei $F : \underline{K} \longrightarrow \underline{B}$ ein kontravarianter Funktor und $K : \underline{L} \times \underline{K} \rightarrow \underline{B}$, dann ist $F \hat{\otimes}_{\underline{K}} K$ ein kontravarianter Funktor ${}^{\underline{L}e}F : \underline{L} \longrightarrow \underline{B}$, der vom Typ Σ ist, wenn F es ist.

3) Sei $F : \underline{K} \longrightarrow \underline{B}$ ein kovarianter Funktor und $K : \underline{L} \times \underline{K} \longrightarrow \underline{B}$, dann ist $\underset{\underline{K}}{\text{n.t.H}}(K,F)$ ein kovarianter Funktor $F^{\underline{L}e} : \underline{L} \longrightarrow \underline{B}$.

4) Sei $F:\underline{K} \longrightarrow \underline{B}$ ein kontravarianter Funktor und $K:\underline{K} \times \underline{L} \longrightarrow \underline{B}$, dann ist $\underset{\underline{K}}{\mathrm{n.t.H}}(K,F)$ ein kontravarianter Funktor $F^{\underline{L}e}:\underline{L} \longrightarrow \underline{B}$.

Von jetzt an gelte $\underline{K} \subseteq \underline{L} \subseteq \underline{A}$, wobei $\underline{A}$ die volle Teilkategorie der Grothendieckräume ist. Dann gilt nach Satz 7 von Cigler.

$$((F^{\underline{L}e}) \mid \underline{K})_e = (\underset{\underline{K}}{\mathrm{n.t.H}}(K,F) \mid \underline{K})_e = F_e.$$

Wir wollen jetzt die Adjungiertheitsrelationen beweisen. Wir beschränken uns wieder auf kovariante Funktoren - für kontravariante käuft der Beweis analog.

Wir betrachten den wesentlichen Einschränkungsfunktor $(.\mid \underline{K})_e$:Funkt $(\underline{L},\underline{B}) \longrightarrow \mathrm{Funkt}_{\Sigma}(\underline{K},\underline{B})$, jedoch in die Kategorie der Funktoren $\underline{K} \longrightarrow \underline{B}$ vom Typ Σ (das ist eine volle Teilkategorie von Funkt $(\underline{K},\underline{B})$). Sei also $F : \underline{K} \longrightarrow \underline{B}$ vom Typ Σ und $G : \underline{L} \longrightarrow \underline{B}$, beide kovariant.

In (II.1), Satz 5 setze man:

$\underline{K} = \underline{U}$, $\underline{L} = \underline{V}$, $F = U$, $G = V$, $K = W : \underline{K} \times \underline{L} \longrightarrow \underline{B}$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\underset{\underline{L}}{\mathrm{n.t.H}}(K\hat{\otimes}_{\underline{K}}F,\ G) &= \underset{\underline{K}}{\mathrm{n.t.H}}(F,\ \underset{\underline{L}}{\mathrm{n.t.H}}(K,G)) \\
&= \underset{\underline{K}}{\mathrm{n.t.H}}(F,\ \underset{\underline{L}}{\mathrm{n.t.H}}(K,G)_e) \quad \text{nach Levin} \\
&= \underset{\underline{K}}{\mathrm{n.t.H}}(F,(G\mid \underline{K})_e) \quad \text{nach Cigler, Satz 7.}
\end{aligned}$$

Es gilt natürlich in F und G:

$$\boxed{\underset{\underline{L}}{\mathrm{n.t.H}}({}^{\underline{L}e}F,G) = \underset{\underline{K}}{\mathrm{n.t.H}}(F,(G\mid \underline{K})_e)}\ ,$$

also ist ${}^{\underline{L}e}(.)$: $\mathrm{Funkt}_{\Sigma}(\underline{K},\underline{B}) \longrightarrow \mathrm{Funkt}(\underline{L},\underline{B})$ linksadjungiert zu $(.|\underline{K})_e : \mathrm{Funkt}(\underline{L},\underline{B}) \longrightarrow \mathrm{Funkt}_{\Sigma}(\underline{K},\underline{B})$.

Setzt man hingegen : $\underline{L}=\underline{U}$, $\underline{K}=\underline{V}$, $G=U$, $F=V$, $K=W : \underline{L}\times\underline{K} \longrightarrow \underline{B}$, dann gilt:

$$\underset{\underline{K}}{\mathrm{n.t.}}(K \mathbin{\hat{\otimes}_{\underline{L}}} G, F) = \underset{\underline{L}}{\mathrm{n.t.}}(G, \underset{\underline{K}}{\mathrm{n.t.}}(K,F))$$

und $K \mathbin{\hat{\otimes}_{\underline{L}}} G = (G|\underline{K})_e$ nach Satz 7 von Cigler, da wegen $\underline{K}\subseteq\underline{L}$ alle Räume $K(X,X)$, $X\in\underline{K}$ gebildet werden können und der Beweis, den Cigler gegeben hat, funktioniert.

Es gilt daher natürlich in F und G:

$$\boxed{\underset{\underline{K}}{\mathrm{n.t.H}}((G|\underline{K})_e, F) = \underset{\underline{L}}{\mathrm{n.t.H}}(G, F^{\underline{L}e})}$$

, also ist $(.)^{\underline{L}e}$: $\mathrm{Funkt}_{\Sigma}(\underline{K},\underline{B}) \longrightarrow \mathrm{Funkt}(\underline{L},\underline{B})$ rechtsadjungiert zu $(.|\underline{K})_e : \mathrm{Funkt}(\underline{L},\underline{B}) \longrightarrow \mathrm{Funkt}_{\Sigma}(\underline{K},\underline{B})$.

(II.4) <u>Die Einheiten der Adjunktionen in (II.3)</u>

Die Einheit der Adjunktion $\mathrm{n.t.H}({}^{\underline{L}e}F, G) = \underset{\underline{K}}{\mathrm{n.t.H}}(F,(G|\underline{K})_e)$ ist die natürliche Transformationen $\varphi : F \longrightarrow (({}^{\underline{L}e}F)|\underline{K})_e$ die der Identität auf ${}^{\underline{L}e}F$ entspricht, wenn man $G={}^{\underline{L}e}F$ setzt.

Nach Satz 5 von Cigler ist $(({}^{\underline{L}e}F)|\underline{K})_e = F$, denn es gilt die allgemeine Voraussetzung $\underline{K}\subseteq\underline{L}\subseteq\underline{A}$. Durch Einsetzen sieht man wieder leicht, daß $\varphi = 1_F : F \longrightarrow F$ ist.

Die Koeinheit dieser Adjunktion ist die natürliche Transformation $\psi : {}^{\underline{L}e}((G|\underline{K})_e) \longrightarrow G$, die der Identität auf $(G|\underline{K})_e$ entspricht, wenn man $F=(G|\underline{K})_e$ setzt.
Man prüft leicht nach, daß

$\psi : \underline{L}^e((G|\underline{K})_e) = K\hat{\otimes}_{\underline{K}}(G|\underline{K})_e \longrightarrow G$ gegeben ist durch

$\psi(h\otimes g) = G(h)\,g$ für $h\otimes g \in K(k,\ell) \otimes G_e(k)$, $k\in\underline{K}$ und $\ell \in \underline{L}$ und (nach Identifizierung, siehe (I.2)) auf dem dichten Teilraum

$K(I,\ell)\otimes G(I) = \ell\otimes G(I)$ von $K^\ell\hat{\otimes}_{\underline{K}}(G|\underline{K})_e$ ist ψ_ℓ die Einbettung

$\ell\otimes G(I) \longrightarrow G_e(\ell) \longrightarrow G(\ell)$.

Wenn man $\ell\otimes G(I)$ als dichten Teilraum von $\underline{L}^e((G|\underline{K})_e)(\ell)$ und von $G_e(\ell)$ auffaßt, dann ist die von $\underline{L}^e((G|\underline{K})_e)(\ell)$ induzierte Norm größer als die von $G_e(\ell)$ induzierte (weil $\|\psi\| = 1$ ist). Man bemerkt auch, daß ψ die Abbildung ist, die auch im Beweis von Satz 5 von Cigler auftritt, wenn man $\underline{L}=\underline{K}$ setzt. Dann wird der Funktor $(.|\underline{K})_e$ zu $(.)_e : \mathrm{Funkt}(\underline{K},\underline{B}) \longrightarrow \mathrm{Funkt}_\Sigma(\underline{K},\underline{B})$ und $(.)_e$ hat den Einbettungsfunktor $\mathrm{Funkt}_\Sigma(\underline{K},\underline{B}) \longrightarrow \mathrm{Funkt}(\underline{K},\underline{B})$ zum Linksadjungierten, weil $\underset{\underline{K}}{n.t.}(F,G) = \underset{\underline{K}}{n.t.}(F,G_e)$ für F vom Typ Σ gilt. Diese Gleichung fällt mit der Adjungiertheitsrelation zusammen (weil der Linksadjungierte eindeutig ist), daher ist im Fall $\underline{L}=\underline{K}$ ψ ein isometrischer Isomorphismus und hat G_e zum Bild in G und wir haben einen weiteren Beweis von Satz 5 von Cigler gefunden, in dem aber (in der Ableitung der Adjungiertheitsrelation) Satz 7 von Cigler verwendet wurde.

Die Einheit der Adjunktion $\underset{\underline{K}}{n.t.\mathcal{H}}((G|\underline{K})_e, F) = \underset{\underline{L}}{n.t.\mathcal{H}}(G, F^{\underline{L}e})$ ist die natürliche Transformation $\tilde{\varphi} : G \longrightarrow ((G|\underline{K})_e)^{\underline{L}e}$, die der Identität auf $(G|\underline{K})_e$ entspricht, wenn man $F = (G|\underline{K})_e$ setzt. Sie errechnet sich in $\tilde{\varphi}_\ell : G(\ell) \longrightarrow \underset{\underline{K}}{n.t.}(K_\ell,(G|\underline{K})_e) = \underset{\underline{K}}{n.t.}(K_\ell, G|\underline{K})$ durch

$\tilde{\varphi}_\ell(g)_K(h) = G(h)g \quad , \quad g\in G(\ell),\ h\in K(\ell,k),\ k\in\underline{K},\ \ell\in\underline{L}.$

Für den Fall $\underline{L}=\underline{K}$ ist $\tilde{\varphi}$ wieder die Abbildung aus Satz 7 von Cigler. Da jedoch $(.)_e$ den Funktor $\underset{\underline{K}}{n.t.}(K,.)$ zum Rechtsadjungierten besitzt, und dieser Funktor nicht so leicht zu handhaben ist wie etwa der Einbettungsfunktor, ist der Zusammenhang zwischen den Sätzen 5 und 7 von Cigler unsymmetrisch.

<u>Bemerkung:</u> Sei $G:\underline{L} \longrightarrow \underline{B}$. Aus

$${}^{\underline{L}e}((G|\underline{K})_e) \xrightarrow{\psi} G \xrightarrow{\overline{\varphi}} ((G|\underline{K}_e)^{\underline{L}e}$$

folgt, daß ${}^{\underline{L}e}(.)$ in gewisser Hinsicht eine "minimale" und $(.)^{\underline{L}e}$ eine "maximale" Erweiterung ist.

Die Koeinheit dieser Adjunktion ist die natürliche Transformation $\overline{\psi} : ((F^{\underline{L}e})|\underline{K})_e \longrightarrow F$, die der Identität auf $F^{\underline{L}e}$ entspricht, wenn man $G = F^{\underline{L}e}$ setzt. Nach Satz 7 von Cigler ist $((F^{\underline{L}e})|\underline{K})_e = F$ und ψ ergibt sich als 1_F.

III. Über Banachräume

In der Kategorie $\underline{B}_1$ (Morphismen sind Kontraktionen) ist jeder Banachraum induktiver Limes von endlichdimensionalen Räumen.

Definition: Sei $\underline{K}$ eine Kategorie. Eine Spektralfamilie in $\underline{K}$ ist eine Familie von Objekten $(A_i)_{i\in M}$, indiziert durch eine halbgeordnete Menge M, zusammen mit je einer Menge Π_i^j von Morphismen für je zwei Indices i, $j\in M$, sodaß gilt:

$\Pi_i^j \neq \emptyset$ genau dann, wenn $i\leq j$ ist. Ist das der Fall, dann besteht Π_i^j aus Morphismen $A_i \longrightarrow A_j$.

Wenn $i\leq j\leq K$ in M ist, dann ist $\pi_j^k \circ \pi_i^j \in \Pi_i^k$ für alle $\pi_j^k \in \Pi_j^k$ und $\pi_i^j \in \Pi_i^j$.

Eine Abbildung von der Spektralfamilie in ein Objekt $A\in\underline{K}$ ist eine Familie von Morphismen $(f_i)_{i\in M}$, indiziert durch dieselbe Menge M, $f_i : A_i \longrightarrow A$, sodaß $f_j \circ \pi_i^j = f_i$ für alle $i\leq j$ in M und für alle $\pi_i^j \in \Pi_i^j$ gilt.

Der induktive Limes der Spektralfamilie (A_i, Π_i^j) ist ein Objekt $\varinjlim A_i$ zusammen mit einer Abbildung $(f_i):(A_i, \Pi_i^j) \longrightarrow \varinjlim A_i$, mit folgender Eigenschaft:

Für jede Abbildung $(g_i):(A_i, \Pi_i^j) \to B$ existiert genau ein Morphismus $g:\varinjlim A_i \to B$ mit $g\circ f_i = g_i$ für alle $i\in M$.

Abbildungen von einem Objekt in die Spektralfamilie und projektive Limiten werden dual definiert.

(III.1)

Satz: Jeder Banachraum X ist in $\underline{B}_1$ induktiver Limes von endlichdimensionalen Räumen I^n mit Summennorm.

<u>Beweis:</u> Sei X ein Banachraum und $\bigcirc X$ seine Einheitskugel. Man weiß, daß $\varphi : \ell^1_{\bigcirc X} \to X$, definiert durch $\varphi((\xi_x)_{x \in \bigcirc X}) = \sum_{x \in \bigcirc X} \xi_x \cdot x$ eine Quotientenabbildung ist (vgl. Buchwalter).

Wir stellen sie als Differenzkokern dar und betrachten dazu folgendes Diagramm:

$$A \underset{0}{\overset{\ker}{\rightrightarrows}} \ell^1_{\bigcirc X} \xrightarrow{\varphi} X,$$ in welchem A

der Nullraum von φ in $\ell^1_{\bigcirc X}$ und $\ker\varphi$ seine Einbettung ist.

Dann läßt sich jedes $f : \ell^1_{\bigcirc X} \to Y$ mit $f \circ \ker\varphi = f \circ 0 = 0$ eindeutig über φ zu $f = f_1 \circ \varphi$ faktorieren.

Die Elemente, die nur an endlich vielen Stellen $x \in \bigcirc X$ von Null verschieden sind, bilden einen dichten Teilraum von $\ell^1_{\bigcirc X}$.

Wir behaupten : sie liegen auch dicht in A, im Nullraum von φ.

Sei $\xi = (\xi_x)_{x \in \bigcirc X} \in A$, dann ist $\varphi(\xi) = \sum_{x \in \bigcirc X} \xi_x \cdot x = 0$. Es existiert eine endliche Teilmenge $L \subseteq \bigcirc X$, sodaß für

$\bar{\xi} = ((\xi_x)_{x \in L}, 0 \text{ sonst})$ gilt:

$$\|\xi - \bar{\xi}\|_{\ell^1} = \sum_{x \in \bigcirc X \setminus L} |\xi_x| \leq \varepsilon/2 .$$

$$y = \varphi(\xi - \bar{\xi}) = \sum_{x \in \bigcirc X \setminus L} \xi_x \cdot x$$

und $z = \frac{y}{\|y\|} \in \bigcirc X$.

Wir definieren $\eta = (\eta_x)_{x \in \bigcirc X}$ durch $\eta_x = \xi_x$ für $x \in L$, $\eta_z = \|y\|$ und $\eta_x = 0$ für $x \in \bigcirc X \setminus L \cup \{z\}$

Dann gilt: $\varphi(\eta) = \sum_{x \in L} \xi_x \cdot x + \|y\| \cdot z + 0$

$$= \sum_{x \in L} \xi_x \cdot x + y = \sum_{x \in L} \xi_x \cdot x + \sum_{x \in \bigcirc X \setminus L} \xi_x \cdot x$$

$= \varphi(\xi) = 0$, also ist $\eta \in A$.

$\|\xi - \eta\|_{\ell^1} \leq \|\xi - \bar{\xi}\|_{\ell^1} + \|\gamma\| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$

Damit liegen die endlichen Folgen dicht in A, also bilden die endlichen Folgen in $\bigcirc A$ eine dichte Teilmenge D.

Nach Buchwalter ist auch die Abbildung $\psi : \ell^1_D \to A$, die durch $\psi((\eta_d)_{d\in D}) = \sum_{d\in D} \eta_d \cdot d \in A$ gegeben ist, eine Quotientenabbildung.

Die Situation wird durch folgendes Diagramm veranschaulicht:

$$\ell^1_D \xrightarrow{\psi} A \underset{0}{\overset{\ker\varphi}{\rightrightarrows}} \ell^1_{\bigcirc X} \xrightarrow{\varphi} X$$

Wir stellen nun $\ell^1_{\bigcirc X}$ als filtrierenden induktiven Limes von endlichdimensionalen Teilräumen I^n mit Summennorm dar. Indexmenge ist die Menge M aller endlichen Teilmengen von $\bigcirc X$, nach-oben-filtrierend halbgeordnet durch Inklusion. Für $i = x_1, \ldots, x_n \in M$ sei B_i der Raum I^n mit Summennorm:

$B_i = \{(\xi x_j)_{j=1}^n , \xi x_j \in I\}$, $\|(\xi x_j)\| = \sum_{j=1}^n |\xi x_j|$. und die Abbildung

$b_i : B_i \to \ell^1_{OX}$ sei gegeben durch $b_i((\xi x_j)_{j=1}^n) = (\xi_x)_{x\in\bigcirc X}$, wobei

$\xi_x = \xi x_j$ für $x = x_j$ und $\xi_x = 0$ für $x \neq x_j$, $j = 1, \ldots, n$ ist, also die Einbettung. Für späteren Gebrauch stellen wir auch die Projektion $\bar{b}_j : \ell^1_{OX} \to B_i$ bereit, die durch $\bar{b}_i((\xi_x)_{x\in\bigcirc X}) = (\xi x_j)_{j=1}^n$ definiert ist.

Dann gilt $\bar{b}_i \circ b_i = 1_{B_i}$ und $\|b_i\| = \|\bar{b}_i\| = 1$.

Für $i \leq j$ in M sei $b^j : B_i \to B_j$ die Einbettung von $\underline{B_i}$ in B_j, zum Beispiel definiert durch $b_i^j = \bar{b}_j \circ b_i$. Auch hier sei $\bar{b}_i^j : B_j \to B_i$ die dazugehörige Projektion, $\bar{b}_j^i = \bar{b}_i \circ b_j$.

Man weiß, daß $\ell^1_{\bigcirc X} = \varinjlim (B_i, b_i^j)$, $i \in M$ ins $\underline{B}_1$ ist.

ℓ^1_D stellen wir als Summe eindimensionaler Räume I_d, $d \in D$, mit den Einbettungen $\varepsilon_d : I_d \to \ell^1_D$ dar.

Wir haben folgendes Diagramm:

$$
\begin{tikzcd}
\ell^1_D \arrow[r, "\psi"] & A \arrow[r, shift left, "\ker\varphi"] \arrow[r, shift right, "0"'] & \ell^1_{OX} \arrow[r] \arrow[dl, shift left, "\bar{b}_i"] \arrow[dr, shift left, "\bar{b}_j"] & X \\
I_d \arrow[u, "\varepsilon_d"] & B_i \arrow[ur, shift left, "b_i"] \arrow[rr, shift right, "b_i^j"'] & & B_j \arrow[ul, shift left, "b_j"] \arrow[ll, shift right, "\bar{b}_i"']
\end{tikzcd}
$$

Das ist noch nicht kompliziert genug.

Wir wollen noch Abbildungen von I , $d \in D$ in gewisse B_i definieren.

Sei $d \in D$ und $x_1, \ldots, x_n \subseteq OX$ die Elemente, an welchen $d = (d_x)_{x \in OX}$ ungleich 0 ist. Wenn $i \in M$ $\{x_1, \ldots, x_n\}$ umfaßt, dann seien die Abbildungen $\in \tau^i_d : I_d \to B_i$,

$$\tau^i_d = \{0,\ \bar{b}_i \circ \ker \varphi \circ \psi \circ \varepsilon_d\} \quad \text{definiert.}$$

(Man beachte, daß jedes τ^i_d aus zwei Abbildungen besteht).

Für $j \geq i$ in M ist klarerweise $b^j_i \circ \tau^i_d = \tau^j_d$. Außerdem definieren wir die Abbildungen $\tau_i : B_i \to X$, $\tau_i = \varphi \circ b_i$, $i \in M$ und

$$\tau_d : I_d \to X,\ \tau_d = 0,\ d \in D.$$

Dann haben wir schon gezeigt, daß

$\{K_d,\ d \in D\} + \{B_i,\ i \in M\}$ mit den Morphismen τ^i_d eine Spektralfamilie ist; τ_α ,$\alpha \in D+M$(disjunkte Vereinigung) ist eine Abbildung von dieser Spektralfamilie in X : Sei τ^i_d definiert, dann ist zu zeigen, daß $\tau_i \circ \tau^i_d = \tau_d = 0$ ist. Sie $d = (d_x)_{x \in OX}$ und $d_{x_1}, \ldots, d_{x_n} \neq 0$.

$1 \in I_d$:

$$\begin{aligned}
\tau_i \circ \tau_d^i(1) &= \tau_i \cdot \bar{b}_i \circ \ker \varphi \circ \psi \circ \varepsilon_d\,(1) \\
&= \varphi \circ b_i \circ \bar{b}_i \circ \ker \varphi \circ \psi \circ \varepsilon_d\,(1) \\
&= \varphi \circ b_i \circ \bar{b}_i \circ \ker \varphi(d) \\
&= \varphi \circ b_i \circ \bar{b}_i\ (d) \\
&= \varphi \circ b_i\ ((d_{x_j})_{j=1}^{n}) \\
&= \varphi((d_{x_j})_{j=1}^{n},\ 0 \text{ sonst}) \\
&= \varphi(d) = 0, \text{ denn } d \text{ liegt im Nullraum von } \varphi\,.
\end{aligned}$$

$\tau_i \circ \tau_d^i(1) = \tau_i \circ 0(1) = 0$ für $0 \in \tau_d^i$. Alle Abbildungen haben $\|\,.\,\| \leq 1$.

Wir zeigen jetzt: X ist induktiver Limes dieser Spektralfamilie.

Sie Y ein beliebiger Banachraum und $f_\alpha, \alpha \in D+M$ eine Familie von Abbildungen:

$$f_d : I_d \longrightarrow Y, \quad f_i : B_i \longrightarrow Y \qquad \text{mit}$$

$$f_i \circ {}^i_d = f_d, \quad f_j \circ b_i^j = f_i, \quad \|f_\alpha\| \leq 1,$$

also eine Abbildung aus der Spektralfamilie in Y:

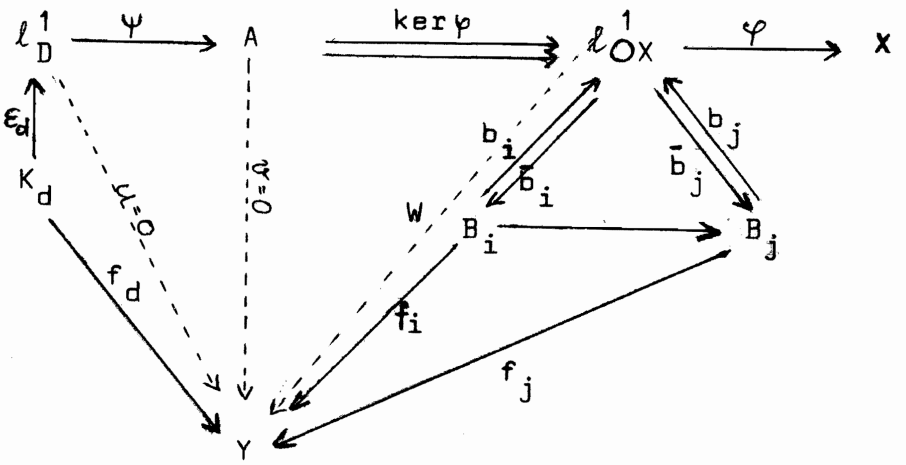
$$\begin{tikzcd}
\ell^1_D \arrow[r] & A \arrow[rr, shift left, "\ker"] \arrow[rr, shift right, "0"'] & & \ell^1_{\sigma X} \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[dr, shift left, "b_j"] & X \\
K_d \arrow[u, "d"] \arrow[dr, "f_g"'] & & B_i \arrow[ur] \arrow[rr, "b_i^j"] \arrow[dl, "f_i"] & & B_j \arrow[ul, shift left, "b_j"] \arrow[dlll, "f_j"] \\
& Y & & &
\end{tikzcd}$$

Wir müssen eine eindeutig bestimmte Kontraktion $f: X \longrightarrow Y$ mit $f_\alpha = f \circ \tau_\alpha$ für $\alpha \in D+M$ finden.

(1) Weil $f_d = f_i \circ \tau^i_d = f_i \circ 0 = 0$ ist für alle $d \in D$, existiert genau eine Abbildung $u = 0 : \ell^1_D \longrightarrow Y$ mit $f_d = u \circ \varepsilon_d$, die auch auch über ψ zu $v = 0 : A \longrightarrow Y$ faktorieren läßt.

(2) Weil $\ell^1_{OX} = \varinjlim B_i$ ist und $f_i = f_j \circ \tau^j_i$ für $j \geq i$ in M gilt, existiert genau eine Abbildung $w: \ell^1_{OX} \longrightarrow Y$ mit $f_i = w \circ b_i$ für alle $i \in M$.

Im Diagramm sieht das so aus:



(3) $0 = f_d = u \circ \varepsilon_d =$

$$f_d = f_i \circ {}^{i}_{d} = f_i \circ \bar{b}_i \circ \ker\varphi \circ \psi \circ \varepsilon_d$$

für i hinreichend groß ($i \geq d^{-1}(I \setminus \{0\}) =: i_0$). Also gilt

$$v \circ \psi \circ \varepsilon_d = f_d = f_i \circ \bar{b}_i$$

für $i \geq i_0$ und wegen der Eindeutigkeit der Summenabbildung folgt

$$v \circ \psi = f_i \circ \bar{b}_i \circ \ker\varphi \circ \psi \text{ für } i \geq i.$$

ψ ist als Quotientenabbildung epimorph, also folgt $v = f_i \circ b_i \circ \ker\varphi$ für $i \geq i_0$.

Nach (2) folgt

$$0 = v = f_i \circ \bar{b}_i \circ \ker\varphi = \omega \circ b_i \circ b_i \circ \ker\varphi \text{ für } i \geq i.$$

Wir behaupten: $\omega \circ \ker\varphi = 0$.

Angenommen, das ist nicht der Fall; das heißt, es existiert ein $a \in A$

mit $\omega\circ\ker\varphi(a) \neq 0$ in Y, also auch $\ker\varphi(a) \neq 0$ in ℓ^1_{OX}. Da ω beschränkt ist, können wir ein $\varepsilon > 0$ finden, für welches aus $\| b-\ker\varphi(a) \|_{\ell^1_{OX}} \leq \varepsilon$ $\omega(b) \neq 0$ folgt. $\ker\varphi(a)$ hat an höchstens abzählbar vielen Koordinaten $x \in OX$ Werte $\neq 0$ und es existieren endlich viele $x_1, \dots, x_n \in O X$, sodaß für $j = x_1, \dots, x_n \in M$ gilt: aus $i \geq j$ folgt

$\| b_i \circ \bar{b}_i(\ker\varphi(a)) - \ker\varphi(a) \|_{\ell^1_{OX}} \leq \varepsilon$.

Sei jetzt $i \geq \max(i, j)$. Dann ist $\| b_i \circ \bar{b}_i(\ker\varphi(a)) - \ker\varphi(a) \|_{\ell^1_{OX}} \leq \varepsilon$, also $\omega \circ b_i \circ \bar{b}_i \circ \ker\varphi(a) \neq 0$, doch für $i \geq i$ hatten wir $\omega\circ b_i \circ \bar{b}_i \circ \ker\varphi = 0$, einen Widerspruch.

Also ist $\omega\circ\ker\varphi = 0 = \omega\circ 0$, wie wir behauptet hatten. Weil φ Differenzkokern von $\ker\varphi$ und 0 ist, existiert ein eindeutig bestimmtes $f: X \to Y$ mit $\omega = f \circ \varphi$.

Da ω durch die f_i eindeutig bestimmt war, ist es auch f und es gilt:

$f \circ \tau_i = f \circ \varphi \circ b_i = \omega \circ b_i = f_i$ nach (2), $i \in M$.

$f \circ \tau_d = f \circ 0 = 0 = f_d$.

Alle auftretenden Morphismen sind Kontraktionen und das beschließt den Beweis des Satzes.

IV. Dualität von Funktoren

In diesem Kapitel soll der Begriff des dualen Funktors, der sich bei Mitjagin-Schwartz findet, näher untersucht werden. In (IV.1) werden Definitionen und bekannte Resultate zitiert und es wird gezeigt, daß $i^{(2)}$: DF $\longrightarrow$ DDDF auf jeder beliebigen Teilkategorie von $\underline{B}$ eine Isometrie ist. Dann wird bewiesen, daß ein Funktor F als Abbildung zwischen Morphismenräumen genau dann eine Isometrie ist, wenn F(I) $\neq$ (0) ist. Im weiteren beschränken wir uns auf Funktoren : $\underline{A} \longrightarrow \underline{B}$, wobei $\underline{A}$ die volle Teilkategorie der Grothendieckräume ist, also der Banachräume, die der metrischen Approximationsbedingung genügen: Für jedes $X \in \underline{A}$ existiert ein Netz von endlichdimensionalen gleichmäßig durch 1 beschränkten Abbildungen $X \to X$, das eine approximierende Linkseinheit in K(X,X), hier der Algebra der kompakten Operatoren $X \to X$, ist.

Man kann alle Ergebnisse leicht für beliebige volle Teilkategorien von $\underline{A}$, die I enthalten, formulieren : die Beweise sind dieselben. Zunächst wird gezeigt, daß jeder duale Funktor ein normiertes Linksideal ist und daß der duale Funktor eines normierten Linksideals das assoziierte Ideal ist.
Zu jedem Funktor wird ein normiertes Halbrechtsideal konstruiert, das allein schon den dualen Funktor bestimmt. Mit diesen Hilfsmitteln ist es möglich, auf zwei Arten alle reflexiven Funktoren: $\underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ zu charakterisieren.

Dann stellen wir einige Überlegungen zur Vermutung von Mitjagin-Schwartz an: "Jeder Funktor DF ist reflexiv"; wir schließen mit Anwendungen der Theorie.

(IV. 1) Dualität von Funktoren und Reflexivität

$\underline{K}$ sei eine volle Teilkategorie; alle Funktoren seien kovariant: $\underline{K} \longrightarrow \underline{B}$

Definition: Der zu einem Funktor F über $\underline{K}$ duale Funktor ist ein kovarianter Funktor $DF:\underline{B} \longrightarrow \underline{B}$ (oder $\underline{K} \longrightarrow \underline{B}$, wir treffen keine Unterscheidung), der so gegeben ist:

$DF(X) = \underset{\underline{K}}{n.t.}\ H(F, \Sigma_X),\ X \in \underline{B}$

$DF(f)(\varphi) = (f \otimes 1.) \circ \varphi,\ f: X \longrightarrow Y,\quad \varphi \in DF(X).$

Die Abbildung $\lambda_X : DF(X) \rightarrow F(X')'$, $\lambda_X(\varphi) = Tr \circ \varphi_X$, für $\varphi \in DF(X)$ ist für jedes X eine Isometrie und das so definierte $\lambda : DF \rightarrow F(.')'$ eine natürliche Transformation. Eine Beschreibung der Funktionale auf $F(X')$, die im Bild von λ_X liegen, ist mit Hilfe der "speziellen Topologie möglich". (vgl. Mitjagin-Schwartz und J. Cigler).

D: $Funkt_{ko}\ (\underline{K},\underline{B}) \longrightarrow Funkt_{ko}\ (\underline{K},\underline{B})$, auf natürlichen Transformationen definiert durch $D(\varphi)_X(\eta) = \eta \circ \varphi$ für $\varphi : F \longrightarrow G$, $\eta \in DG(X)$, ist ein kontravarianter Funktor, linear und eine Kontraktion auf den Morphismenräumen.

Der Funktor D ist zu sich selbst adjungiert zur Rechten; die Adjungiertheitsrelation $n.t.H(F,DG) = n.t.H(G,DF)$; $F,G: \underline{K} \longrightarrow \underline{B}$, ist gegeben durch die Zuordnung $\varphi \longleftrightarrow \varphi'$,

$\varphi_X(x)_Y(y) = {}^t[\varphi'_Y(y)_X(x)]$ für $x \in F(X)$, $y \in G(Y)$, wobei ${}^t: X \otimes Y \longrightarrow Y \otimes X$ die Transposition $x \otimes y \longmapsto y \otimes x$ ist.

Setzt man F=DG, so erhält man $n.t.H(DG,DG) = n.t.H(G,DDG)$; die natürliche Transformation $i: G \longrightarrow DDG$, die der Identität $DG \rightarrow DG$ entspricht, heißt die kanonische Abbildung (=Einheit der Adjunktion). Sie ist gegeben durch:

$$i_X(x)_Y(y) = {}^t\left[Id_{DG(Y)}(y)_X(x)\right] = {}^t y_X(x) \quad \text{für} \quad x \in G(X) \text{ und}$$

$y \in DG(Y)$. Sie ist im allgemeinen weder injektiv noch surjektiv; ist sie jedoch eine natürliche Äquivalenz (jedes i_X isometrischer Isomorphismus) so heißt der Funktor G reflexiv. (vgl. Mitjagin-Schwartz)

<u>Satz:</u> Sei $F:\underline{K} \longrightarrow \underline{B}$ ein Funktor und $i^{(1)}:F \longrightarrow DDF$, $i^{(2)}: DF \longrightarrow DDDF$ die kanonischen Abbildungen. Dann ist für jedes $X \in \underline{K}$ $i^{(2)}{}_X$ eine Isometrie und $D(i^{(1)})_X$ eine Quotientenabbildung.

<u>**Beweis:**</u> Sei $i^{(1)} : F \longrightarrow DDF$ die kanonische Abbildung. Wir betrachten:

$D(i^{(1)})$: $DDDF \longrightarrow DF$ und

$D(i^{(1)}) \circ i^{(2)}$: $DF \longrightarrow DDDF \longrightarrow DF$.

Sei $y \in DF(Y)$, $Y \in \underline{K}$; dann ist

$$\left[D(i^{(1)}) \circ i^{(2)}\right]_Y(y) = D(i^{(1)})_Y \circ i^{(2)}{}_Y(y)$$
$$= i^{(2)}_Y(y) \circ i^{(1)}: F \longrightarrow DDF \longrightarrow \Sigma_Y;$$

das können wir auf $x \in F(X)$, $X \in \underline{K}$ anwenden;

$$\left[D(i^{(1)}) \circ i^{(2)}\right]_Y(y)_X(x) = i^{(2)}_Y(y)_X \circ i^{(1)}_X(x)$$
$$= i^{(2)}{}_Y(y)_X \left(i^{(1)}{}_X(x)\right)$$
$$= {}^t\left(i^{(1)}{}_X(x)_Y(y)\right)$$
$$= {}^{tt}\left(y_X(x)\right) = y_X(x).$$

Also ist $\left[D(i^{(1)}) \quad i^{(2)}\right]_Y(y) = y$ für $y \in DF(Y)$, $Y \in \underline{K}$ und

$D(i^{(1)})_Y \circ i^{(2)}_Y = Id_{DF(Y)}$ für $Y \in \underline{K}$.

Weil $D(i^{(1)})_Y$ und $i^{(2)}{}_Y$ Kontraktionen sind, ist für jedes $Y \in \underline{K}$ $i^{(2)}{}_Y$ eine Isometrie und $D(i^{(1)})_Y$ eine Quotientenabbildung.

(IV.2) Das Verhalten von Funktoren als Abbildungen zwischen Morphismenräumen

Sei $\underline{K}$ eine volle Teilkategorie von $\underline{B}$ und $I \in \underline{K}$. Sei $F : \underline{K} \to \underline{B}$ ein kovarianter Funktor.

Nach V.L. Levin ist $F(I) \otimes X$ injektiv in $F(X)$ eingebettet; der Abschluß in $F(X)$ definiert den wesentlichen Teilfunktor F_e von F (vgl. Kap. I). Wir unterscheiden zwei Fälle:

1) $F(I) = (0)$. Dann ist auch $F(X) = (0)$ für alle endlichdimensionalen Räume X in $\underline{K}$, da für endliche Summen (oder Produkte) $\sum X_i$ gilt: $F(\sum X_i)$ ist isomorph zu $\sum F(X_i)$. F_e ist der Nullfunktor; man sagt: der wesentliche Teil von F verschwindet.

2) $F(I) \neq (0)$. Man sagt: F hat nichtverschwindenden wesentlichen Teil.

Satz: Sei $F : \underline{K} \to \underline{B}$ ein kovarianter Funktor. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

(i) F hat nichtverschwindenden wesentlichen Teil

(ii) Für jedes $f : X \to Y$ in $\underline{K}$ gilt:

$$\|F(f)\| = \|f\|$$

Korollar: Wenn $F_e \neq 0$ ist, dann ist $F : H(X,Y) \to H(F(X),F(Y))$ eine Isometrie; insbesonders ist das Bild abgeschlossen.

Beweis: Sei $F_e \neq 0$.

Dann ist $F_e(X) = F(I) \overline{\otimes}_{\alpha_X} X$, die Vervollständigung von $F(I) \otimes X$ in einer Crossnorm $\alpha_X \geq \lambda$ für alle $X \in \underline{K}$. Sei $\varepsilon > 0$ und $f : X \to Y$ in $\underline{K}$ gegeben. Weil $F(I) \neq (0)$ ist, existiert ein $a \in F(I)$ mit $\|a\| = 1$.

Mann kann auch ein $x \in X$ mit $\|x\| = 1$ und $\|f(x)\| \geqslant \|f\| - \varepsilon$ finden.

Dann ist $\alpha_X(a \otimes x) = \|a\| \, \|x\| = 1$ und

$$\|f\| \geqslant \|F(f)\| \geqslant \| F(f) \, i_X \, (a \otimes x) \|_{F(Y)}$$

$$= \alpha_Y((F(I) \otimes f)(a \otimes x))$$

$$= \alpha_Y(a \otimes f(x))$$

$$= \|a\| \, \|f(x)\| \geqslant \|f\| - \varepsilon,$$

also $\|f\| = \|F(f)\|$.

Wenn umgekehrt $F_e = 0$ ist, also $F(I) = (0)$, dann ist $F(x') : F(X) \longrightarrow F(I) = (0)$, also $\|F(x')\| = 0$ für alle $x' : X \longrightarrow I$. qed.

<u>**Beispiele:**</u> Sei $\underline{K} = \underline{B}$, $K(X,Y)$ der Raum der kompakten Abbildungen $X \longrightarrow Y$ und $F = H_X / K_X$. Weil für $f \in K(Y,Z)$ stets $f \circ g \in K(X,Z)$ für alle $g \in H(X,Y)$ gilt, ist $F(f) = 0$ für alle $f \in K(Y,Z)$.

Im kontravarianten Fall gilt analog der folgende Satz (verwende (I.1)):

<u>Satz</u>: Sei $\underline{G} : \underline{K} \longrightarrow \underline{B}$ ein kontravarianter Funktor. G hat genau dann nichtverschwindenden wesentlichen Teil, wenn $\|G(f)\| = \|f\|$ ist für jeden $\underline{K}$-Morphismus f .

<u>Satz</u>: Sei $F : \underline{K} \longrightarrow \underline{B}$ ein kovarianter Funktor vom Typ Σ und $X, Y \in \underline{K}$. Sei (x'_v) ein beschränktes, schwach* gegen Null konvergentes Netz in X'. Dann konvergiert für jedes $f_X \in F(X)$ das Netz $F(x'_v)(f_X)$ in $F(I)$ gegen Null.

<u>Beweis:</u> Nach Levin ist $F(X) = F(I) \tilde{\otimes}_{\alpha_X} X$, wobei α_X eine Crossnorm $\geqslant \lambda$ ist und $F(x'_\nu) = F(I) \otimes x'_\nu$. Sei z.B. $\| x'_\nu \| \leqslant 1$.
Sei $f_X \in F(X)$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Es existiert ein $u = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i \in F(I) \otimes X$ mit $\| f_X - u \|_{F(X)} \leqslant \varepsilon/2$ und ein ν_0, sodaß für $\nu \geqslant \nu_0$ gilt:

$$|x'_\nu(x_i)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2n \, \| a_i \|} \qquad \text{für } i=1,\ldots,n.$$

Dann gilt:

$$\| F(x'_\nu)(f_X) \| \leqslant \| F(x'_\nu)(f_X - u) \| + \| F(x'_\nu) \, u \|$$

$$\leqslant \| x'_\nu \| \, \| f_X - u \| + \| (F(I) \otimes x'_\nu)(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i) \|$$

$$\leqslant \varepsilon/2 + \| \sum_{i=1}^{n} x'_\nu(x_i) \, a_i \|$$

$$\leqslant \varepsilon/2 + \sum_{i=1}^{n} |x'_\nu(x_i)| \, \| a_i \| \leqslant \varepsilon$$

qed.

<u>Bemerkung:</u> Wegen des Satzes von Banach-Dieudonné besagt dieses Ergebnis, daß $F : H(X,I) \longrightarrow H(F(X),F(I))$ stetig ist, wenn $X' = H(X,I)$ mit der schwach*- Topologie (=starke Operatortopologie) und $H(F(X),F(I))$ mit der starken Operatortopologie ausgestattet ist, und $\dim F(I) < \infty$ ist.

(IV.3) <u>Beschreibung der dualen Funktoren durch normierte Linksideale</u>

<u>Definition:</u> Sei $A \in \underline{B}$ und $H_A : \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ der Funktor $H_A(X) = H(A,X)$ für $X \in \underline{A}$. Ein Funktor $\Lambda_A : \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ heißt normiertes Linksideal (n.L.I.) in H_A, wenn gilt:

1) $\Lambda_A(X) = \Lambda(A,X)$ ist linearer Teilraum von $H_A(X)$.
2) Für alle eindimensionalen Abbildungen $f : A \longrightarrow X$ gelte $\| f \|_{\Lambda(A,X)} = \| f \|_{H(A,X)}$.

3) Für einen $\underline{A}$-Morphismus $f:X \longrightarrow Y$ ist $\Lambda(A,f) = H(A,f) \mid \Lambda(A,X)$: $\Lambda(A,X) \longrightarrow \Lambda(A,Y)$, also $\Lambda_A(f)(g) = f \circ g$, $g \in \Lambda(A,X)$.

4) Für jedes $X \in \underline{A}$ und jede approximierende Einheit u_i in $K(X,X)$ gelte:

$$\lim_i \| \Lambda(A,u_i)(f) \|_\Lambda = \lim_i \| u_i \circ f \|_\Lambda = \| f \|_\Lambda$$

für alle $f \in \Lambda(A,X)$.

Bemerkung: a) $g \circ f = \Lambda(A,g)(f) \in \Lambda(A,Y)$ und

$$\| g \circ f \|_\Lambda = \| \Lambda(A,g)(f) \|_\Lambda \leqslant \| g \| \cdot \| f \|_\Lambda$$

für alle $g \in H(X,Y)$ und $f \in \Lambda(A,X)$.

b) $\| f \| \leqslant \| f \|_\Lambda$ für alle $f \in \Lambda(A,X)$, denn

$$\| f \| = \sup_{\| x' \| \leqslant 1} \| x' \circ f \|$$

$$= \sup_{\| x' \| \leqslant 1} \| x' \circ f \|_\Lambda \quad \text{nach 2)}$$

$$\leqslant \sup_{\| x' \| \leqslant 1} \| x' \| \| f \|_\Lambda = \| f \|_\Lambda \quad \text{nach a).}$$

<u>Satz:</u> Sei $F : \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ ein Funktor und $DF : \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ der zu F duale Funktor. Dann ist $DF = \Lambda_{F(I)}$, ein normiertes Linksideal in $H_{F(I)}$. Wenn F vom Typ Σ ist, enthält $\Lambda(F(I),X)$ alle endlichdimensionalen Abbildungen $F(I) \longrightarrow X$ (also $F(I)' \otimes X$) für jedes $X \in \underline{A}$.

<u>Beweis:</u> Sei $F(I) = A \in \underline{B}$ und $X \in \underline{A}$.

$DF(X) = n.t.H(F, \Sigma_X)$; wir betrachten die Abbildung

$j_X : DF(X) \longrightarrow H(F(I),X) = H(A,X)$, die durch $j_X(\beta) = \beta_I : F(I) \rightarrow \Sigma_X(I) = X$ für $\beta \in DF(X)$ definiert ist.

Weil $X \in \underline{A}$ der Grothendieckschen Approximationsbedingung genügt, ist nach Theorem 2 von Mitjagin-Schwartz j_X injektiv.

$X \longmapsto j_X$ ist eine natürliche Transformation $j : DF \longrightarrow H_A = H_{F(I)}$.

Wir definieren: Λ_A ist das Bild von j. Für $X \in \underline{A}$ ist $\Lambda(A,X) = J_X(DF(X))$ und $\|f\|_\Lambda = \|J_X^{-1}(f)\|_{DF(X)}$, $f \in \Lambda(A,X)$. Dann ist $\|.\|_\Lambda$ eine Norm auf $\Lambda(A,X)$, die so gewählt ist, daß damit $\Lambda(A,X)$ und $DF(X)$ isometrisch isomorph sind, also ist $\Lambda(A,X)$ ein Banachraum. Weil J eine natürliche Transformation ist, gilt 3) der Definition und $\Lambda(A,.)$ ist ein Funktor.

Wir zeigen 2): $\|f\| = \|f\|_\Lambda$ für alle eindimensionalen f in $\Lambda(A,X)$, $f = J_X(\alpha) = \alpha_I$ für ein $\alpha \in DF(X)$. Sei $Y \in \underline{A}$ und $y' \in Y'$. Dann ist folgendes Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} F(Y) & \xrightarrow{\alpha_Y} & X\hat{\otimes} Y \\ {\scriptstyle F(y')}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle X\otimes y'} \\ F(I)=A & \xrightarrow{\alpha_I = f} & X\hat{\otimes} I = X. \end{array}$$

$\alpha_I = f : F(I) = A \longrightarrow X\hat{\otimes}I = X$ ist eindimensional; also ist $\alpha_I(F(I)) = I.x$, $x \in X$, $x \neq 0$.

Wir behaupten: dann ist auch $\alpha_Y(F(Y)) \in x\otimes Y$. Es genügt zu zeigen, daß für jedes $u \in X\hat{\otimes}Y \setminus x\otimes Y$ ein $y' \in Y'$ existiert mit $(X\otimes y')u \notin I\cdot x$; denn dann kann man das Gegenteil der Behauptung mit Hilfe des obigen Diagrammes zum Widerspruch führen. Wir identifizieren $X\hat{\otimes}Y$ mit $L^1(X',Y)$, dem Raum der schwach* auf X' stetigen nuklearen Abbildungen (vgl. Buchwalter) durch folgende Zuordnung, die eine natürliche Äquivalenz definiert, da X der Approximationsbedingung genügt: $x\otimes y \longmapsto \langle x, .\rangle y$. $u \in X\hat{\otimes}Y \setminus x\otimes Y$; das heißt $\ker u \neq \ker\langle x, .\rangle$ und wegen $u \neq 0$ und $\ker\langle x, .\rangle$ Hyperebene in X' gilt sogar $\ker\langle x,.\rangle \setminus \ker u \neq \emptyset$. Sei also $x' \in \ker\langle x, .\rangle \setminus \ker u$ in X'. Dann ist $u(x') \neq 0$ in Y und

$\langle x, x'\rangle = 0$. Wähle $y' \in Y'$ so, daß $\langle u(x'), y'\rangle \neq 0$ ist. Damit haben wir: $(X \otimes y')\, u \notin I \cdot x$ in $X \hat{\otimes} I$, denn $(\langle ., x'\rangle \otimes I) \circ (X \otimes y')\, u = \langle u(x'), y'\rangle \neq 0$ und $\langle x, x'\rangle = 0$. Wir haben damit die obige Behauptung bewiesen.

$\alpha_Y : F(Y) \to X \hat{\otimes} Y$ läßt sich also auch so schreiben: $\alpha_Y(f_Y) = x \otimes w_Y(f_Y)$ für $f_Y \in F(Y)$, $w_Y : F(Y) \to Y$.

Damit gilt:

$$\|\alpha_Y\| = \sup_{\|f_Y\| \leq 1} \|\alpha_Y(f_Y)\| = \sup_{\|f_Y\| \leq 1} \|x \otimes w_Y(f_Y)\|$$

$$= \sup_{\|f_Y\| \leq 1} \|x\| \, \|w_Y(f_Y)\| = \sup_{\substack{\|f_Y\| \leq 1 \\ \|y'\| \leq 1}} \|x\| \, |\langle w_Y(f_Y), y'\rangle|$$

$$= \sup_{\substack{\|f_Y\| \leq 1 \\ \|y'\| \leq 1}} \|x \otimes \langle w_Y(f_Y), y'\rangle\|_{X \hat{\otimes} I}$$

$$= \sup_{\substack{\|f_Y\| \leq 1 \\ \|y'\| \leq 1}} \|(X \otimes y')\, \alpha_Y(f_Y)\|$$

$$= \sup_{\substack{\|f_Y\| \leq 1 \\ \|y'\| \leq 1}} \|\alpha_I \circ F(y')\,(f_Y)\| \leq \|\alpha_I\|$$

und $\|f\|_\Lambda = \|J_X^{-1}(f)\|_{DF(X)} = \|\alpha\|_{DF(X)}$

$$= \sup_{Y \in \underline{A}} \|\alpha_Y\| = \|\alpha_I\| = \|f\|.$$

Wir zeigen 4): Sei $X \in \underline{A}$ und u_i approximierende Einheit in $K(X,X)$. Wir müssen zeigen, daß $\|f\|_\Lambda = \lim_i \|u_i \circ f\|_\Lambda$ für alle $f \in \Lambda(A,X)$ ist.

Sei $f \in \Lambda(A,X)$, also $f = \alpha_I$ für ein $\alpha \in DF(X)$.

Wir definieren $\beta^i = DF(u_i)\alpha = (u_i \otimes 1.)\beta \in DF(X)$. Dann ist $\beta^i{}_I = (u_i \otimes 1_I)\alpha_I = u_i \circ f$ und $\|\beta^i\|_{DF(X)} = \|u_i \circ f\|_\Lambda$.

Wir müssen zeigen: $\lim_i \|\beta^i\| = \|\alpha\| = \|f\|_\Lambda$.

$\|\beta^i\| = \|DF(u_i)\alpha\| \leq \|u_i\| \|\alpha\| \leq \|f\|_\Lambda$, es fehlt also nur noch der Nachweis, daß man an $\|\alpha\|$ von unten genügend nahe herankommt.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

Es gibt ein $Y \in \underline{A}$ mit $\|\alpha_Y\| \geq \|\alpha\| - \varepsilon/5$

Es gibt ein $z \in F(Y)$, $\|z\| = 1$ mit $\|\alpha_Y(z)\|_{X \hat{\otimes} Y} \geq \|\alpha_Y\| - \varepsilon/5$

Es gibt ein $v \in X \otimes Y$, $v = \sum_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k$ mit $\|v - \alpha_Y(z)\|_{X \hat{\otimes} Y} \leq \varepsilon/5$

Es gibt ein i_0, sodaß für $i \geq i_0$ gilt:

$$\|u_i(x_k) - x_k\|_X \leq \frac{\varepsilon}{5n\|y_k\|}, \quad k = 1, \ldots, n .$$

Sei $i \geq i_0$. Dann gilt:

$$\|(u_i \otimes Y)\alpha_Y(z) - \alpha_Y(z)\|_{X \hat{\otimes} Y} \leq$$

$$\leq \|(u_i \otimes Y)(\alpha_Y(z) - v)\| + \|(u_i \otimes Y)v - v\| + \|v - \alpha_Y(z)\| \leq \|u_i \otimes Y\| \varepsilon/5 +$$

$$+ \left\|\sum_{k=1}^{n} (u_i(x_k) - x_k) \otimes y_k\right\| + \varepsilon/5 \leq 3\varepsilon/5 .$$

Damit erhalten wir:

$$\|\beta^i_Y(z)\| = \|(u_i \otimes Y)\alpha_Y(z)\| \geq \|\alpha_Y(z)\| - 3\varepsilon/5$$

$$\geq \|\alpha_Y\| - 4\varepsilon/5$$

$$\geq \|\alpha\| - \varepsilon ,$$

also $\sup_Y \|\beta^i_Y\| \geq \|\alpha\| - \varepsilon$, $\|\beta^i\| \geq \|\alpha\| - \varepsilon$

für $i \geq i_0$, das heißt $\lim_i \|\beta^i\| = \|\alpha\|$.

Wir zeigen den zweiten Teil des Satzes:

Sei F vom Typ Σ. Wir zeigen, daß $\Lambda(A,X)$ alle endlichdimensionalen Abbildungen $A \longrightarrow X$ enthält. Dazu genügt es, jede eindimensionale Abbildung $f: A \longrightarrow X$, $f = \langle ., a' \rangle x$ für $a' \in A'$ und $x \in X$.[1] Wir konstruieren ein $\beta \in DF(X)$ mit $J_X(\beta) = \beta_I = f$.

So ein β muß das folgende Diagramm für jedes $y' \in Y'$, $Y \in \underline{A}$ kommutativ machen:

---

[1] in $\Lambda(A,X)$ nachzuweisen.

$$\begin{tikzcd} F(Y) \arrow[r, "\beta_Y"] \arrow[d, "F(y')"'] & X\hat{\otimes}Y \arrow[d, "X\otimes y'"] \\ F(I) = A \arrow[r, "\beta_I = f"] & X\hat{\otimes}I = X \end{tikzcd}$$

Daraus liest man die Definition von β ab:

$$\beta_Y(f_Y) = x\otimes w_Y(f_Y), \quad f_Y \in F(Y), \text{ wobei } w_Y : F(Y) \longrightarrow Y \text{ durch}$$

$$\langle w_Y(f_Y), y'\rangle = \langle F(y')\, f_Y, a'\rangle , \quad y' \in Y'$$

schwach* definiert ist; das ist wohldefiniert, weil

$y' \longmapsto \langle F(y')f_Y, a'\rangle$ nach dem letzen Satz aus (IV.2) und dem Satz von Banach-Dieudonné schwach*-stetig ist.

β_Y ist dann klarerweise linear und

$\|\beta_Y\| \leqslant \|x\|\|w_Y\|$ und

$$\|w_Y\| = \sup_{\substack{\|f_Y\|\leqslant 1\\ \|y'\|\leqslant 1}} |\langle w_Y(f_Y), y'\rangle|$$

$$= \sup_{\substack{\|f_Y\|\leqslant 1\\ \|y'\|\leqslant 1}} |\langle F(y')\, f_Y, a'\rangle| \leqslant \|a'\|,$$

also ist $\|\beta_Y\| \leqslant \|x\|\|a'\| = \|f\|$.

Behauptung: $Y \mapsto \beta_Y$ ist natürlich : $F \to \Sigma_X$. Sei $h : Y \longrightarrow Z$ ein $\underline{A}$-Morphismus. Wir müssen untersuchen, ob

$$\begin{tikzcd} F(Y) \arrow[r, "\beta_Y"] \arrow[d, "F(h)"'] & X\hat{\otimes}Y \arrow[d, "X\otimes h"] \\ F(Z) \arrow[r, "\beta_Z"] & X\hat{\otimes}Z \end{tikzcd}$$

kommutiert:

$$(X\otimes h)\circ\beta_Y(f_Y) = (X\otimes h)\ (x\otimes w_Y(f_Y))$$
$$= x\otimes(h\circ w_Y\ (f_Y)) \ ,\quad f_Y\in F(Y).$$
$$\beta_Z \circ F(h)\ (f_Y) = x\otimes(w_Z\ (F(h)\ f_Y)).$$

So bleibt also zz: $h\circ w_Y(f_Y) = w_Z(F(h)\ f_Y)$, also: $w : F \longrightarrow Id_{\underline{A}}$ ist natürlich.

Sei $z'\in Z'$.

$$\begin{aligned}\langle w_Z(F(h)f_Y),\ z'\rangle &= \langle F(z')F(h)f_Y,\ a'\rangle\\ &= \langle F(z'\circ h)f_Y,\ a'\rangle\\ &= \langle F(h'(z'))f_Y,\ a'\rangle\\ &= \langle w_Y(f_Y),\ h'(z')\rangle\\ &= \langle h\ w_Y(f_Y),\ z'\rangle .\end{aligned}$$

und weil die $z'\in Z'$ punktetrennend sind:

$$w_Z\circ F(h) = h\circ w_Y \text{ für } h : Y \longrightarrow Z.$$

Wir zeigen als letztes : $\beta_I = f$.

Sei $a\in F(I) = A$.

$$\beta_I(a) = x\otimes w_I(a)$$
$$\langle w_I(a),\ 1\rangle = \langle F(1)\ a,\ a'\rangle = \langle a,a'\rangle$$

also $\beta_I\ (a) = x\otimes\langle a,a'\rangle = \langle a,a'\rangle\ x = f(a)$

und damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Sei Λ_A ein normiertes Linksideal in H_A über der Kategorie $\underline{A}$.

$B := \Lambda(A,I) \subseteq H(A,I) = A'$ und die Λ-Norm auf B ist die von A' induzierte wegen 2), da alle Abbildungen in B eindimensional sind.

Sei $f\in\Lambda(A,X)$, $X\in\underline{A}$. Dann ist $f'(X')\subseteq B\subseteq A'$, denn für jedes $x'\in X'$ ist

$$f'(x') = x'\circ f = \Lambda(A,x')(f)\in\Lambda(A,I) = B.$$

Wir können daher $g\in H(B,Y)$ und $f\in\Lambda(A,X)$ zu $g\circ f'$ komponieren und das Ergebnis liegt in $H(X',Y)$. Folgende Definition ist also sinnvoll:

<u>Definition:</u> Sei Λ_A ein normiertes Linksideal in H_A und $B=\Lambda(A,I)\subseteq A'$. Das zu Λ_A assoziierte normierte Linksideal $\Lambda^x{}_B$ in H_B ist definiert durch

$$\Lambda^X(B,X) = \Big\{ g\in H(B,X)\ ,\ g\circ f'\in L^1(Y',X) = Y\hat{\otimes}X$$
$$\text{für alle}\quad f\in\Lambda(A,Y),\ Y\in \underline{A}\ \text{und}$$
$$\|g\|_{\Lambda X} = \sup_{\substack{f\in\Lambda(A,Y),Y\in\underline{A}\\ \|f\|_\Lambda\leqslant 1}} \|g\circ f'\|_{L^1} < \infty \Big\}$$

$\Lambda^X(B,h)g = h\circ g$ für $h : X\longrightarrow Y$.

Aus dem nächsten Satz wird folgen, daß $\Lambda^X{}_B$ wieder ein normiertes Linksideal in H_B ist. Doch zunächst beweisen wir ein

<u>Lemma:</u> $\Lambda^X(B,X)\supseteq \big\{ f|B,\ f\in L^1(A',X) = A\hat{\otimes}X\big\}$.

<u>Beweis:</u> Sei $i : B\longrightarrow A'$ die Einbettung.

Sei $f\in L^1(A',X) = A\hat{\otimes}X$ und $g\in\Lambda(A,Y)$. $f|B\circ g' = f\circ i\circ g' = f\circ g'$, wo im letzten Ausdruck $g' : X'\longrightarrow A'$ definiert ist.

$f\circ g' = L^1(g',X)(f)\in L^1(Y',X)\ (=(g\hat{\otimes}X)(f)\in Y\hat{\otimes}X\ )$ und

$\|f\circ g'\|_{L^1}\leqslant \|g\|\|f\|_{L^1}$. qed.

<u>Satz:</u> Sei Λ_A ein normiertes Linksideal in H_A über $\underline{A}$ und $B=\Lambda(A,I)$. Dann ist $D\Lambda_A = \Lambda^X{}_B$.

<u>Beweis:</u> Nach dem letzten Satz ist $D\Lambda_A = \Omega_{\Lambda(A,I)}$ für ein normiertes Linksideal in $H_{\Lambda(A,I)}$; $\Lambda(A,I) = B$.

Wir müssen zeigen, daß $\Omega_B = \Lambda^X{}_B$ ist.

Wir behaupten: wenn $g\in\Omega(B,X)$ ist, dann ist $g\in\Lambda^X(B,X)$ und $\|g\|_{\Lambda^X}\leqslant\|g\|_\Omega$.

Sei $g\in\Omega(B,X)$, dann ist $g = J_X(\beta) = \beta_I$ für ein $\beta\in D\Lambda_A(X) = n.t\,H(\Lambda_A,\Sigma_X)$.

Sei $f \in \Lambda(A,Y)$, $Y \in \underline{A}$ und $y' \in Y'$, dann ist das folgende Diagramm kommutativ, weil β eine natürliche Transformation ist:

$$\begin{tikzcd}
\Lambda(A,Y) \arrow[r, "\beta_Y"] \arrow[d, "\Lambda(A,y')"'] & X\hat{\otimes}Y \arrow[d, "X\otimes y'"] \\
\Lambda(A,I)=B \arrow[r, "\beta_I = g"] & X\hat{\otimes}I = X.
\end{tikzcd}$$

Wegen der Identifikation $L^1(Y',X) = X\hat{\otimes}Y$ gilt:

$$\begin{aligned}
\beta_Y(f)\ (y') &= (X\hat{\otimes}y')\ \beta_Y(f),\quad f \in \Lambda(A,Y). \\
&= \beta_I \cdot \Lambda(A,y')\ (f) \\
&= \beta_I\ (y' \circ f) = \beta_I\ (f'(y')) \\
&= \beta_I \circ f'(y') = g \circ f'(y'),\quad y' \in Y'.
\end{aligned}$$

(✱) Also gilt: $\boxed{\beta_Y\ (f) = \beta_I \circ f'} \in X\hat{\otimes}Y = L^1(Y',X)$

$$\begin{aligned}
\|g \circ f'\|_{L^1} &= \|\beta_Y(f)\|_{X\hat{\otimes}Y} \leqslant \|\beta_Y\|\ \|f\|_\Lambda \\
&\leqslant \|\beta\|\,\|f\|_\Lambda = \|g\|_\Omega\ \|f\|_\Lambda\ .
\end{aligned}$$

Wir haben daher $g \in \Lambda^X(B,X)$ und $\|g\|_{\Lambda^X} \leqslant \|g\|_\Omega$.

Wir behaupten: Wenn $g \in \Lambda^X(B,X)$ ist, dann ist $g \in \Omega(B,X)$ und $\|g\|_\Omega \leqslant \|g\|_{\Lambda^X}$. Sei $g \in \Lambda^X(B,X)$, dann ist $g \circ f' \in L^1(Y',X) = X\hat{\otimes}Y$ für jedes $f \in \Lambda(A,Y)$, $Y \in \underline{A}$, und $\|g \circ f'\|_{L^1} \leqslant \|g\|_{\Lambda^X}\ \|f\|_\Lambda$. Wir verwenden jetzt die Gleichung (✱) als Definition von $\beta \in D\Lambda_A(X)$,

$$\beta_Y : \Lambda(A,Y) \longrightarrow X\hat{\otimes}Y = L^1(Y',X)$$

$$\beta_Y(f) = g \circ f',\quad f \in \Lambda(A,Y).$$

Dann ist β_Y linear und $\|\beta_Y\| \leqslant \|g\|_{\Lambda^X}$ und wir zeigen, daß $Y \to \beta_Y$ natürlich ist. Sei $h : Y \to Z$ in $\underline{A}$.

$$\begin{array}{ccc}
\Lambda(A,Y) & \xrightarrow{\beta_Y} & X\hat{\otimes}Y \\
{\scriptstyle \Lambda(A,h)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle X\otimes h} \\
\Lambda(A,Z) & \xrightarrow{\beta_Z} & X\hat{\otimes}Z.
\end{array}$$

Wegen der Identifikation $L^1(Y',X) = X\hat{\otimes}Y$ gilt wieder:

$(X\otimes h)\,\beta_Y(f) = (X\otimes h)\,(g\circ f') = g\circ f'\circ h'$

$\beta_Z \cdot \Lambda(A,h)\,(f) = \beta_Z(h\circ f) = g\circ f'\circ h'.$

Wir zeigen: $\beta_I = J_X(\beta) = g$. Sei $b\in B = \Lambda(A,I)$, dann ist $b' : I' \longrightarrow A'$ so, daß $b'(I') \subseteq B \subseteq A'$ nach den Überlegungen weiter oben, und $b' = \hat{b}$, $\hat{b}(1) = b$. Also gilt: $\beta_I(b) = g\circ b' = g\circ\hat{b}$ und wegen der Identifizierung $H(I,B) = B$: $= g\circ\hat{b}(1) = g(b)$.

Damit folgt $\beta_I = g$, also $g\in\Omega(B,X)$ und $\|g\|_\Omega = \|\beta\| = \sup_{Y\in \underline{A}} \|\beta_Y\| \leqslant \|g\|_{\Lambda^X}$

Beide Resultate zusammen ergeben $\Omega_B = \Lambda^X_B$ und beschließen den Beweis.

(IV. 4) Dualität und normierte Halbrechtsideale

Definition: Sei $A\in\underline{B}$.

Ein Funktor $\Omega(.',A) : \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ heißt normiertes Halbrechtsideal in $H(.',A)$, wenn gilt:

1) Für jedes $X\in\underline{A}$ ist $\Omega(X',A)$ ein linearer Teilraum von $H(X',A)$.

2) Für jedes $X\in\underline{A}$ umfaßt $\Omega(X',A)$ den Raum $X\otimes A$ der endlichdimensionalen schwach*-stetigen Abbildungen $X' \longrightarrow A$.

3) Für jede eindimensionale schwach*-stetige Abbildung $f: X' \longrightarrow A$ gilt $\|f\|_\Omega = \|f\|$

4) Für einen $\underline{A}$-Morphismus $h : X \longrightarrow Y$ gilt : $\Omega(h',A) = H(h',A)|\Omega(X',A)$.

<u>Bemerkung:</u> a) Die Halbrechtsidealeigenschaft:

$f \circ g' = \Omega(g',A)(f) \in \Omega(Y',A)$ und

$\| f \circ g' \|_\Omega = \| \Omega(g',A)(f) \|_\Omega \leqslant \| \Omega(g',A) \| \, \| f \|_\Omega \leqslant \| g' \| \, \| f \|$

für alle $g \in H(X,Y)$ und $f \in \Omega(X',A)$.

b) $\| f \| \leqslant \| f \|_\Omega$ für alle $f \in \Omega(X',A)$, denn

$$\| f \| = \sup_{\| x' \| \leqslant 1} \| f(x') \| = \sup_{\| x' \| \leqslant 1} \| f \circ \widehat{(x')} \|$$

$$= \sup_{\| x' \| \leqslant 1} \| f \circ \hat{x}' \|_\Omega \quad \text{nach 3)}$$

$$\leqslant \sup_{\| x' \| \leqslant 1} \| f \|_\Omega \| \hat{x}' \| = \| f \|_\Omega \quad \text{nach a).}$$

<u>Satz:</u> Sei $F: \underline{A} \to \underline{B}$ ein Funktor. Dann existiert ein Quotientenfunktor $\Omega_F(.',F(I))$ von F, der ein normiertes Halbrechtsideal ist. (Genauer: Es existiert eine natürliche Transformation $\varphi: F \to \Omega_F(.', F(I))$, sodaß für jedes $X \in \underline{A}$ φ_X eine Quotientenabbildung ist).

<u>Beweis:</u> Wir definieren $\varphi: F \to \Omega_F(.',F(I))$ durch $\boxed{\varphi_X(f_X)(x') = F(x') f_X}$, $f_X \in F(X)$, $x' \in X'$. Das ist eine natürliche Transformation, denn für $f: X \to Y$ in $\underline{A}$ ist

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\varphi_X} & H(X',F(I)) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H(f',F(I))} \\ F(Y) & \xrightarrow{\varphi_Y} & H(Y',F(I)) \end{array}$$

kommutativ:

Sei $f_X \in F(X)$, $y' \in Y'$, dann ist $[H(f', F(I)) \varphi_X(f_X)] (y') = \varphi_X(f_X) \circ f' (y')$

$= \varphi_X(f_X) (f'(y')) =$

$= F(f'(y')) (f_X) =$

$= F(y' \circ f) (f_X) =$

$$= F(y')(F(f)(f_X))$$

$$= \varphi_Y(F(f)(f_X))(y') \ .$$

Weil $\|\varphi_X(f_X)(x')\| = \| F(x')(f_x)\| \leqslant \|x'\| \cdot \|f_X\|$ ist, haben wir $\|\varphi\| \leqslant 1$.

Wir definieren $\Omega_F(X',F(I))$ als im φ_X, ausgestattet mit der Quotientennorm. Dann wird $\Omega_F(.',F(I))$ zu einem Funktor mit $\Omega(f',F(I)) = H(f',F(I))\,|\,\Omega(X',F(I))$ für $f : X \longrightarrow Y$ in $\underline{A}$.

Wir zeigen (2) :

$$\begin{tikzcd}
F(I)\otimes X \arrow[r, "\iota_X"] \arrow[d, "k_X"'] & F(X) \arrow[dl, "\varphi_X"] \\
H(X',F(I)) &
\end{tikzcd}$$

ist kommutativ,

wobei $i_X : \sum a_i \otimes x_i \longmapsto \sum F(\hat{x}_i)a_i$ die Einbettung nach $F(X)$ und

$k_X : \sum a_i \otimes x_i \longmapsto \sum \langle x_i, . \rangle \, a_i$ die Einbettung nach

$H(X',A)$ ist.

Sei $\sum a_i \otimes x_i \in F(I) \otimes X$ und $x' \in X'$

$$[\varphi_X \circ i_X(\sum a_i \otimes x_i)] \ (x') = \varphi_X(\sum F(\hat{x}_i)a_i)(x')$$

$$= F(x')(\sum F(\hat{x}_i)a_i)$$

$$= \sum F(x' \circ \hat{x}_i)a_i$$

$$= \sum F(\langle x_i, x' \rangle 1_I)a_i$$

$$= \sum \langle x_i, x' \rangle \ a_i$$

$$= K_X \ (\sum a_i \otimes x_i)(x').$$

3) gilt, denn nach Levin ist die von $F(X)$ auf $F(I)\otimes X$ induzierte Norm eine Crossnorm.

qed.

Definition: Sei $\Omega(.',A)$ ein normiertes Halbrechtsideal in $H(.',A)$ über $\underline{A}$. Wir definieren das zu $\Omega(.',A)$ assoziierte normierte Linksideal $\Omega^*(A,.)$ in H_A über $\underline{A}$ durch

$$\Omega^*(A,X) = \Big\{ f\in H(A,X),\ f\circ g\in L^1(Y',X) = X\hat{\otimes}Y \text{ für alle } g\in\Omega(Y',A),\ Y\in\underline{A} \text{ und } \|f\|_{\Omega^*} := \sup_{\substack{g\in\Omega(Y',A),\, Y\in\underline{A}\\ \|g\|_{\Omega}\leq 1}} \|f\circ g\|_{L^1} < \infty \Big\}$$

Der nächste Satz und (IV.3) werden zeigen daß $\Omega^*(A,.)$ tatsächlich ein normiertes Linksideal in H_A ist ($\varphi = Id$).

Satz: Sei $F : \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ ein Funktor, $\varphi : F \longrightarrow \Omega(.',F(I))$ die Quotiententransformation auf das normierte Halbrechtideal aus dem letzten Satz. Dann ist $DF = \Omega^*(F(I),.)$.

Beweis: $DF = \Lambda(F(I),.)$ für ein normiertes Linksideal $\Lambda(F(I),.)$ in $H_{F(I)}$ nach (IV.3) und die natürliche Äquivalenz $j: DF \longrightarrow \Lambda(F(I),.)$ war gegeben durch $j_X(\beta) = \beta_I$, $\beta\in DF(X)$.

Wir behaupten: Wenn $g\in\Lambda(F(I),X)$ ist, dann ist auch $g\in\Omega^*(F(I),X)$ und $\|g\|_{\Omega^*} \leq \|g\|_{\Lambda}$.

$g\in\Lambda(F(I),X)$ heißt $g = \beta_I$ für ein $\beta\in DF(X)$. Wir benötigen ein

Lemma: Sei $\beta\in DF(X)$. Dann gilt $\ker\varphi_Y \subseteq \ker\beta_Y$ für jedes $Y\in\underline{A}$.

Beweis des Lemmas: Sei $f_Y\in F(Y)$, $f_Y\in\ker\varphi_Y$, das heißt

$\varphi_Y(f_Y) = 0$,

$\varphi_Y(f_Y)(y') = F(y')f_Y = 0$, $y'\in Y'$.

Wir betrachten das folgende kommutative Diagramm (β natürlich):

$$(\S)\qquad \begin{tikzcd} F(Y) \arrow[r, "\beta_Y"] \arrow[d, "F(y')"'] & X\hat{\otimes} Y \arrow[d, "X\otimes y'"] \\ F(I) \arrow[r, "\beta_I"] & X\hat{\otimes} I = X. \end{tikzcd}$$

Wir nehmen an, das $\beta_Y(f_Y) \neq 0$ ist in $X\hat{\otimes}Y$. Weil $X\in\underline{A}$ ist, sind die Abbildungen $X\otimes y' : X\hat{\otimes}Y \longrightarrow X\hat{\otimes}I = X$, $y'\in Y'$ punktetrennend (das sieht man sofort aus $X\hat{\otimes}Y = L^1(Y',X)$, $(X\otimes y')\,u = u(y')$). Also gibt es ein $y'\in Y'$ mit $(X\otimes y')\,\beta_Y(f_Y) \neq 0$ in X, damit auch $\beta_I \circ F(y')\ (f_Y) \neq 0$ nach dem Diagramm und das ist ein Widerspruch.

Wir verfolgen den Beweis des Satzes weiter:

(**) Da $\ker \varphi_Y \subseteq \ker \beta_Y$ gilt, kann β_Y so faktoriert werden:

$$\begin{tikzcd} F(Y) \arrow[rr, "\beta_Y"] \arrow[d, "\varphi_Y"'] & & X\hat{\otimes}Y \\ F(Y)/_{\ker\varphi_Y} = \Omega(Y',F(I)). \arrow[urr, "\bar{\beta}_Y"'] & & \end{tikzcd}$$

Wir können das Diagramm (§) weiter zerlegen, und alles bleibt kommutativ, weil φ eine natürliche Transformation ist:

$$\begin{tikzcd} F(Y) \arrow[rr, "\beta_Y"] \arrow[dr, "\varphi_Y"] \arrow[ddd, "F(y')"'] & & X\hat{\otimes}Y = L^1(Y',X) \arrow[ddd, "X\otimes y' = L^1(\hat{y}',X)"] \\ & F(Y)/_{\ker\varphi_Y} = \Omega(Y',F(I)) \arrow[ur, "\bar{\beta}_Y"'] \arrow[d, "\Omega(\hat{y}',F(I))"] & \\ & F(I) = \Omega(I,F(I)) & \\ F(I) \arrow[ur, "\varphi_I", "\cong"'] \arrow[rr, "\beta_I"] & & X\hat{\otimes}I = L^1(I,X) = X \end{tikzcd}$$

φ_I ist die Identität:

$\varphi_I(a)(1) = F(1)(a) = a \in F(I)$

Sei $f \in \Omega(Y',F(I))$ und wie oben $y' \in Y'$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\bar\beta_Y(f)\ (y') &= \bar\beta_Y(f) \circ \hat{y}'(1) \\
&= \bar\beta_Y(f) \circ \hat{y}' \qquad \text{wegen } L^1(I,X) = X \\
&= L^1(\hat{y}',X)\,\bar\beta_Y(f) \\
&= \beta_I \circ \Omega(\hat{y}',F(I))(f) \\
&= \beta_I\ (f \circ \hat{y}') \\
&= \beta_I\ (f \circ \hat{y}'(1)) \qquad \text{wegen } \Omega(I,F(I)) = F(I) \\
&= \beta_I\ (f(y')) \\
&= \beta_I \circ f(y') = g \circ f\ (y').
\end{aligned}$$

Also gilt insgesamt:

$g \circ f = \beta_I \circ f = \bar\beta_Y(f) \in L^1(Y',X) = X \hat{\otimes} Y$ und

$\| g \circ f \|_{L^1} = \| \bar\beta_Y(f) \|_{X \hat{\otimes} Y} \leq \| \bar\beta \| \, \| f \|_{\Omega} = \| \beta \| \, \| f \|_{\Omega}$

für alle $f \in \Omega(Y',F(I))$; damit ist

$g \in \Omega^*(F(I),X)$ und $\| g \|_{\Omega^*} \leq \| \beta \| = \| g \|_{\Lambda}$.

Umgekehrt behaupten wir: Wenn $g \in \Omega^*(F(I),X)$ ist, dann ist auch

$g \in \Lambda(F(I),X)$ und $\| g \|_{\Lambda} \leq \| g \|_{\Omega^*}$.

$g \in \Omega^*(F(I),X)$ heißt $g \circ f \in L^1(Y',X) = X \hat{\otimes} Y$ und

$\| g \circ f \|_{L^1} \leq \| g \|_{\Omega^*} \| f \|_{\Omega}$ für alle $f \in \Omega(Y',F(I))$, $Y \in \underline{A}$.

Wir definieren also für $Y \in \underline{A}$:

$\bar\beta_Y : \Omega(Y',F(I)) \longrightarrow L^1(Y',X) = X \hat{\otimes} Y$ durch

$\bar\beta_Y\ (f) = g \circ f \quad , \quad f \in \Omega(Y',F(I))$.

$\bar\beta_Y$ ist dann linear *und* $\| \bar\beta_Y \| \leq \| g \|_{\Omega^*}$

Wir zeigen, daß $Y \mapsto \bar\beta_Y$ natürlich ist.

Sei $h : Y \longrightarrow Z$ in $\underline{A}$. Wir müssen nachrechnen, ob das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} \Omega(Y', F(I)) & \xrightarrow{\overline{\beta}_Y} & L^1(Y',X) \\ {\scriptstyle \Omega(h',F(I))}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle L^1(h',X)} \\ \Omega(Z',F(I)) & \xrightarrow{\overline{\beta}_Z} & L^1(Z',X) \end{array}$$

Sei $f \in \Omega(Y',F(I))$. Dann ist:

$L^1(h',X)\ \overline{\beta}_Y(f) = L^1(h',X)(g\circ f) = g\circ f\circ h'$

$\overline{\beta}_Z \circ \Omega(h',F(I))\ (f) = \overline{\beta}_Z\ (f\circ h') = g\circ f\circ h'$.

Wir haben jetzt eine natürliche Transformation

$\overline{\beta} : \Omega(.',F(I)) \longrightarrow \Sigma_X$,

Wir definieren $\beta \in DF(X) = n.t.\ H(F,\Sigma_X)$ durch $\beta = \overline{\beta}\circ\varphi$; das ist als Komposition zweier natürlicher Transformationen wieder natürlich und $\|\beta\| \leqslant \|\overline{\beta}\|\,\|\varphi\| \leqslant \|g\|_{\Omega^*}$, also ist $\beta \in DF(X)$.

Wenn wir noch zeigen, daß $\beta_I = j_X(\beta) = g$ ist, dann ist $g \in \Lambda(F(I),X)$ und $\|g\|_\Lambda \leqslant \|g\|_{\Omega^*}$.

Sei also $a \in F(I)$; dafür gilt:

$\beta_I(a) = \overline{\beta}_I \circ \varphi_I(a)$

$\qquad = \overline{\beta}_I \circ \hat{a}$ wegen $F(I) = \Omega(I,F(I))$

$\qquad = g\circ\hat{a} = g(a)$ wegen $L^1(I,X) = X$, also $\beta_I = g$ und das beschließt den Beweis des Satzes.

<u>Korollar:</u> Wie schon in der Definition behauptet, ist für ein beliebiges normiertes Halbrechtsideal $\Omega(.', A)$ in $H(.',A)$ über $\underline{A}$ $\Omega^*(A,.)$ ein normiertes Linksideal.

<u>Beweis:</u> Setze $F = \Omega(.',A)$; es folgt alles aus dem Satz, wenn gezeigt ist, daß dann $\varphi = \mathrm{id}$ ist. Sei $f \in \Omega(X',A)$ und $x' \in X'$:

$$\begin{aligned}\varphi_X(f)(x') = F(x')f &= \Omega((x')',A)f \\ &= \Omega(\hat{x}',A)f = \\ &= f \circ \hat{x}' = f \circ \hat{x}'(1) \qquad \text{wegen } \Omega(I,A) = A \\ &= f(x')\end{aligned}$$

Also $\varphi_X(f) = f$. qed.

<u>Bemerkung:</u> Unter anderem haben wir folgende Aussagen über die Struktur von Funktoren $\underline{A} \to \underline{B}$ gewonnen:

1) Der Duale eines Funktors mit verschwindendem wesentlichen Teil ist der Nullfunktor, wegen (IV.3)!

2) Funktoren, die das gleiche normierte Halbrechtsideal als Quotientenfunktor haben, haben gleiche duale Funktoren;

3) Dieser Dualitätsbegriff ignoriert also die Funktoren F/F_e und $\ker\varphi \subseteq F$ für $F : \underline{A} \to \underline{B}$.

(IV. 5) <u>Reflexive Funktoren: $\underline{A} \longrightarrow \underline{B}$</u>

<u>Satz:</u> Sei $\Lambda(A,.)$ ein normiertes Linksideal in $H(A,.)$ über $\underline{A}$, $B = \Lambda(A,I)$, $C = \Lambda^X(B,I)$. Dann ist folgendes Diagramm kommutativ:

$$\begin{tikzcd} \Lambda(A,X) \arrow[d, "i_X"'] \arrow[dr, "k_X"] & \\ DD\Lambda_A(X) \arrow[r, "j_X"'] & \Lambda^{XX}(C,X) \end{tikzcd}$$

wobei $i : \Lambda_A \longrightarrow DD\Lambda_A$ in (IV. 1) und $j : DD\Lambda_A \longrightarrow \Lambda^{XX}_C$ in (IV. 3) definiert ist und $K : \Lambda_A \longrightarrow \Lambda^{XX}_C$ eine natürliche Transformation von Norm ≤ 1 ist, gegeben durch:

$$\langle K_X(f)(c), x' \rangle = \langle f'(x'), c \rangle , \quad f \in \Lambda(A,X),$$
$$c \in C = \Lambda^X(B,I) \subseteq B', \quad x' \in X' \quad (\Rightarrow f'(x') \in B).$$

<u>Beweis:</u> $i_X : \Lambda(A,X) \longrightarrow DD\Lambda_A(X)$ ist gegeben durch $i_X(f)_Y(\beta) = \beta_X(f)$ für $X,Y \in \underline{A}$, $f \in \Lambda(A,X)$, $\beta \in D\Lambda_A(Y)$; $j_X : DD\Lambda_A(X) \longrightarrow \Lambda^{XX}(C,X)$ ist gegeben durch $j_X(\alpha) = \alpha_I$ für $\alpha \in DD\Lambda_A(X)$. Sei $f \in \Lambda(A,X)$. Dann ist $f'(X') \subseteq B \subseteq A'$ (vgl. (IV. 3)) und $j_X \circ i_X(f) = i_X(f)_I$. Sei $\beta \in D\Lambda_A(I)$, also $\beta_I = c \in \Lambda^X(B,I) = C$, und $x' \in X'$; dann gilt:

$$\begin{aligned}
[j_X \circ i_X(f)] \ (\beta) &= i_X(f)_I \ (\beta) \\
&= \beta_X(f) \\
&= \beta_I \circ f' \text{ nach } (*) \text{ aus (IV. 3),}
\end{aligned}$$

also
$$\begin{aligned}
\langle j_X \ i_X(f) \ (\beta), x' \rangle &= \beta_I \circ f'(x') \\
&= \langle f'(x'), c \rangle ,
\end{aligned}$$

daher $\langle K_X(f)(c), x' \rangle = \langle f'(x'), c \rangle$,

wobei $K_X(f) = j_X \circ i_X(f)$ ist und β mit $\beta_I = c$ identifiziert wurde. Der Rest ergibt sich aus $K = j \circ i$. qed.

<u>Bemerkung:</u> Weil $f'(X') \subseteq B \subseteq A'$ ist, faktorisiert f'' zu :

$$A'' \longrightarrow A''/B^{\circ} = B' \xrightarrow{\widetilde{f''}} X''$$ und es ist $C \subseteq B'$. Also ist $\widetilde{f''}|C$ wohldefiniert und stimmt mit $K_X(f)$ überein. Überdies gilt $\widetilde{f''}(C) \subseteq X \subseteq X''$.

<u>Korollar:</u> Sei $F : \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ ein Funktor. Dann ist folgendes Diagramm,

in welchem $A = F(I)$, $B = \Lambda(A,I)$, $C = \Lambda^X(B,I)$ und K wie im Satz ist, kommutativ:

$$\begin{tikzcd} DF \arrow[r, "j^{(1)}"] \arrow[d, "i^{(2)}"'] & \Lambda(A,.) \arrow[d, "K"] \\ D^3F \arrow[r, "j^{(3)}"] & \Lambda^{XX}(C,.). \end{tikzcd}$$

Dabei ist jedes K_X eine Isometrie, weil jedes $i^{(2)}_X$ es ist (vgl. (IV. 1)).

<u>Korollar:</u> Die reflexiven Funktoren $\underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ sind genau die normierten Linksideale $\Lambda(A,.)$ in H_A über $\underline{A}$ $(A \in \underline{B})$, für welche jede der Abbildungen

$$K_X : \Lambda(A,X) \longrightarrow \Lambda^{XX}(C,X)$$

ein isometrischer Isomorphismus ist. Dann gilt auch $A = C$.

<u>Beweis:</u> Ein solcher Funktor ist reflexiv nach dem Satz, weil $i = J^{-1} \circ K$ eine natürliche Äquivalenz ist.
Ist F reflexiv, so ist $J^{(2)} \circ i$ eine natürliche Äquivalenz:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, "j^{(2)} \circ i"] & \\ DDF \arrow[r, "j^{(2)}"] & \Lambda(A,.) \end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "j^{(2)} \circ i"] \arrow[d, "i"'] & \Lambda(A,.) \arrow[d, "\parallel"] \\ DDF \arrow[r, "j^{(2)}"] & \Lambda(A,.) \end{tikzcd}$$

ist kommutativ. qed.

Wir geben eine zweite Charakterisierung der reflexiven Funktoren: $\underline{A} \longrightarrow \underline{B}$.

<u>Zitat:</u> Sei $F:\underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ ein Funktor und DF der zu F duale Funktor. Dann ist $\varphi : DF \to \Omega_{DF}(.',DF(I))$ injektiv, also ein isometrischer Isomorphismus.

Das ist Theorem 2, § 3 aus Mitjagin-Schwartz.

<u>Satz:</u> Sei $F : \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ ein Funktor, $A = F(I)$, $j^{(1)}: DF \to \Lambda(A,.)$, $B = \Lambda(A,I)$. Dann ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\varphi} & \Omega(.',A) \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\ DDF & \xrightarrow{j^{(2)}} & \Lambda^{\times}(B,.) \end{array}$$

kommutativ,

wobei $\psi : \Omega(.',A) \longrightarrow \Lambda^{\times}(B,.)$ durch $\langle \psi_X(h)(b),\ x' \rangle = \langle h(x'),b \rangle$ für $h \in \Omega(X',A)$, $x' \in X'$ und $b \in B$ definiert ist.

<u>Beweis:</u> Da für alle $X \in \underline{A}$ φ_X surjektiv ist, genügt es zu zeigen, daß das Diagramm kommutativ ist, denn dann folgt auch, daß $\psi_X(h) : B \longrightarrow X$, $\psi_X(h) \in \Lambda^{\times}(B,X)$ und ψ natürlich ist. Da $\Omega(.',A)$ Quotientennorm (bezüglich φ) trägt, gilt $\|\psi\| \leqslant 1$, weil $\| j^{(2)} \circ i \| \leqslant 1$ ist.

Sei also $f_X \in F(X)$:

$$j^{(2)}{}_X \circ i_X(f_X) = i_X(f)_I .$$

Das können wir auf $\alpha \in DF(I)$, $\alpha_I = b \in B$, anwenden:

$[j^{(2)}{}_X \circ i_X(f_X)]\ (\alpha) \in X\hat{\otimes} I = X$. Sei $x' \in X'$:

$$\begin{aligned} \langle [j^{(2)}{}_X\ i_X(f_X)]\ (\alpha),\ x' \rangle &= \langle i_X(f_X)_I\ (\alpha),\ x' \rangle \\ &= \langle \alpha_X(f_X),\ x' \rangle \\ &= (I\hat{\otimes} x') \circ \alpha_X(f_X) \\ &= \alpha_I \circ F(x')\ (f_X) \end{aligned}$$

$$= \langle F(x')(f_X),\ b\rangle$$
$$= \langle \varphi_X(f_X)(x'),\ b\rangle$$
$$= \langle \psi_X \circ \varphi_X(f_X)(b),\ x'\rangle .$$

Da b und α einander eindeutig eintsprechen, haben wir also
$j^{(2)}{}_X \circ i_X(f_X) = \psi_X \circ \varphi_X(f_X)$. qed.

<u>Korollar:</u> Da $j^{(2)}{}_X$ für jedes $X \in \underline{A}$ injektiv ist, folgt aus dem Satz:

1) $\ker i_X \supseteq \ker \varphi_X$ für jedes $X \in \underline{A}$.
2) Wenn B auf A punktetrennend wirkt (nach (IV.3) also z.B. dann, wenn F vom Typ Σ ist), dann ist ψ_X injektiv und es gilt:
   $\ker i_X = \ker \varphi_X$ für jedes $X \in \underline{A}$.

<u>Korollar:</u> Die reflexiven Funktoren $\underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ sind genau die normierten Halbrechtsideale $\Omega(.',A)$ in H_A über $\underline{A}$, $A \in \underline{B}$, für die die Abbildung $\psi : \Omega(.'.A) \longrightarrow (\Omega^*)^{\times}(B,.)$, $B = \Omega^*(A,I)$, eine natürliche Äquivalenz ist.

Der Beweis folgt aus dem Satz und dem Zitat.

(IV. 6) <u>Zur Reflexivität von DF.</u>

<u>Satz:</u> Sei $F : \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ ein Funktor und $i^{(1)} : F \longrightarrow DDF, i^{(2)} : DF \longrightarrow DDDF$ die kanonischen Transformationen. Dann sind folgende Aussagen zueinander äquivalent:

1) DF is reflexiv
2) $i^{(2)}{}_I$ ist ein Epimorphismus (hat dichtes Bild)
3) $D(i^{(1)})_I$ ist ein Monomorphismus (ist injektiv).

Beweis: Im Abschnitt (IV. 1) wurde gezeigt, daß $D(i^{(2)}) \circ i^{(2)} = \mathrm{Id}_{DF}$ ist und speziell, daß $i_X^{(2)}$ isometrisch und $D(i^{(1)})_X$ eine Quotientenabbildung für $X \in \underline{A}$ ist. Also sind die Aussagen 2) und 3) äquivalent und 1) $\Rightarrow$ 2) ist eine Spezialisierung.

Wir setzen 2) voraus und zeigen 1).

Wir müssen nachweisen, daß $i_X^{(2)}$ für jedes $X \in \underline{A}$ ein isometrischer Isomorphismus ist und wissen bereits, daß $i_X^{(2)}$ eine Isometrie ist; es bleibt zu beweisen, daß $i_X^{(2)}$ surjektiv ist für jedes $X \in \underline{A}$.

Wir untersuchen $i^{(2)} \circ D(i^{(1)}) : DDDF \longrightarrow DF \longrightarrow DDDF$. Wenn wir schon wissen, daß $i^{(2)} \circ D(i^{(1)}) = \mathrm{Id}_{DDDF}$ ist, dann folgt aus $i_X^{(2)} \circ D(i^{(1)})_X = \mathrm{Id}_{DDDF(X)}$ und $\| i_X^{(2)} \| \leqslant 1$, $\| D(i^{(1)})_X \| \leqslant 1$, daß $i_X^{(2)}$ eine Quotientenabbildung und $D(i^{(1)})_X$ eine Isometrie ist, also speziell, daß $i_X^{(2)}$ für jedes $X \in \underline{A}$ surjektiv ist.

Wir haben also $i^{(2)} \circ D(i^{(1)}) = \mathrm{Id}_{DDDF}$ zu zeigen. Weil $i_I^{(2)}$ dichtes Bild hat und eine Isometrie ist, also ein isometrischer Isomorphismus, und nach (IV.1): $D(i^{(1)})_I \circ i_I^{(2)} = \mathrm{Id}_{DF(I)}$ gilt, folgt (**) : $i_I^{(2)} \circ D(i^{(1)})_I = \mathrm{Id}_{DDDF(I)}$.

Sei $\eta \in DDDF(X), X \in \underline{A}$:

$$i^{(2)} \circ D(i^{(1)})_X(\eta) = i_X^{(1)} \circ D(i^{(1)})_X(\eta)$$
$$= i_X^{(2)}(\eta \circ i^{(1)}) \in DDDF(X).$$

Das können wir auf $\varphi \in DDF(Y)$; $Y \in \underline{A}$ anwenden:

$$i^{(2)} \circ D(i^{(1)})_X(\eta)_Y(\varphi) = i_X^{(2)}(\eta \circ i^{(1)})_Y(\varphi)$$
$$= {}^t(\varphi_X(\eta \circ i^{(1)})) \in Y \hat{\otimes} X.$$

Da $\mathrm{Id}_{DDDF(X)}(\eta)_Y(\varphi) = \eta_Y(\varphi)$ ist, bleibt folgendes zu beweisen:

Für alle $X, Y \in \underline{A}$ und $\eta \in DDDF(X)$, $\varphi \in DDF(Y)$ gilt:

${}^t(\varphi_X(\eta\circ i^{(1)})) = \eta_Y(\varphi)$ in $Y\acute{\otimes}X$. Nun bringen wir Hilfsmittel aus der Theorie der normierten Linskideale ((IV.3), (IV.5)) ins Spiel. Zunächst eine Übersicht:

$$j^{(1)} : DF \longrightarrow \Lambda(A,.),\quad A = F(I)$$

$$j^{(2)} : DDF \longrightarrow \Lambda^{x}(B,.),\quad B = \Lambda(A,I)$$

$$j^{(3)} : DDDF \longrightarrow \Lambda^{xx}(C,.),\quad C = \Lambda^{x}(B,I),\quad E = \Lambda^{xx}(C,I).$$

Damit reduziert sich die Behauptung zu:

Für alle $X,Y \in \underline{A}$ und $f \in \Lambda^{xx}(C,X)$, $g \in \Lambda^{x}(B,Y)$ gilt:

$${}^t(g\circ i_I^{(1)}{}' \circ f') = f\circ g' \in L^1(Y',X);$$

dabei wurde die Beziehung (*) aus (IV.3) :

$$\varphi_X(\eta\circ i^{(1)}) = \varphi_I\circ(\eta\circ i^{(1)})_I{}'$$

$$\eta_Y(\varphi) = \eta_I\circ\varphi_I{}' \quad \text{verwendet und}$$

$$\varphi_I = g,\ \eta_I = f \text{ geschrieben.}$$

Wir wollen die Abbildung $i_I^{(1)} : F(I) = A \longrightarrow DDF(I) = C$ näher beschreiben:

Für $a \in A = F(I)$ gilt $j_I^{(2)}\circ i_I^{(1)}(a) = i_I^{(1)}(a)_I$; das kann man auf $\beta \in DF(I)$ anwenden, also $\beta_I = b \in B = \Lambda(A,I)$:

$$i_I^{(1)}(a)_I\ (\beta) = \beta_I(a) = b(a) = \langle a,b\rangle .$$

Wir schreiben also für die Abbildung $i_I^{(1)} : F(I) \longrightarrow DDF(I)$ modulo $j_I^{(2)}: DDF(I) \xrightarrow{=} C$ $\quad\varepsilon : A \to C = \Lambda^{x}(B,I) \subseteq B'$, definiert durch $\langle b, \varepsilon(a)\rangle = \langle a,b\rangle$, $a\in A$, $b \in B$.

Wir haben also zu zeigen:

$${}^t(g\circ\varepsilon'\circ f') = f\circ g' \quad \text{in } L^1(Y',X),\ \text{wobei}$$

${}^t : L^1(X',Y) \longrightarrow L^1(Y',X)$ der isometrische Isomorphismus $h \mapsto h'$ ist.

Wir wissen, daß die Gleichung (**) gilt, also gilt unsere Behauptung für den Fall $X = Y = I$:

Für alle $e \in E = \Lambda^{xx}(C,I)$, $c \in C = \Lambda^{x}(B,I)$

gilt: ${}^t(c \circ \varepsilon' \circ e') = e \circ c' \in L^1(I,I)$.

$e : C \longrightarrow I$, $e' = \hat{e} : I \longrightarrow E \subseteq C'$, $\hat{e}(1) = e$;

$\varepsilon' : E \longrightarrow B$, $c : B \longrightarrow I$, $c' = \hat{c} : I \longrightarrow C \subseteq B'$;

$c \circ \varepsilon' \circ e'(1) = c \circ \varepsilon'(e) = \langle \varepsilon'(e), c \rangle$

$e \circ c'(1) = e(c) = \langle c, e \rangle$.

Damit haben wir : Für alle $e \in E = \Lambda^{xx}(C,I)$,

$c \in C = \Lambda^{x}(B,I)$ gilt : $\langle \varepsilon'(e), c \rangle = \langle c, e \rangle$.

Behauptung: Für alle $X, Y \in \underline{A}$, $f \in \Lambda^{xx}(c,X)$, $g \in \Lambda^{x}(B,Y)$

gilt: ${}^t(g \circ \varepsilon' \circ f') = f \circ g'$ in $L^1(Y',X)$.

Sei $x' \in X'$, $y' \in Y'$, dann gilt es zu zeigen:

$\langle g \circ \varepsilon' \circ f'(x'), y' \rangle = \langle f \circ g'(y'), x' \rangle$. oder

$\langle \varepsilon'(f'(x')), g'(y') \rangle = \langle g'(y'), f'(x') \rangle$.

$f'(x') \in \Lambda^{xx}(C,I) = E$, $g'(y') \in \Lambda^{x}(B,I) = C$

und wir haben gerade festgestellt, daß für Elemente aus E und C die Gleichung gilt. Damit ist der Satz bewiesen.

(IV. 7) Anwendungen

Alle Funktoren seien $\underline{A} \longrightarrow \underline{B}$.

1) $F = \Sigma_A : \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$, $A \in \underline{B}$.

$\varphi : F \to \Omega_F(.',A) = L^1(.',A)$ sieht so aus:

$\varphi_X(a \otimes x)(x') = \langle x, x' \rangle \, a, \quad a \otimes x \in A \hat{\otimes} X, \; x' \in X'.$

Daher ist $DF = \Omega_F^*(A,.) = (L^1)^*(A,.) = H_A$. Das ist schon bekannt (vgl. Mitjagin-Schwartz).

2) $F = L(.',A) : \underline{A} \to \underline{B}$, $A \in \underline{B}$, wobei $L(X',A) = X \hat{\hat{\otimes}} A$ der Raum der schwach* - Norm - stetigen linearen Abbildungen mit Operatornorm ist (vgl. Buchwalter).

$\varphi : F \to \Omega_F(.',A)$ ist definiert durch

$$\varphi_X(f)(x') = L((x')', A)(f) = L(\hat{x'}, A)(f)$$
$$= f \circ \hat{x'} = \widehat{f(x')} \text{ in } H(I,A)$$

für $f \in L(X',A)$, $x' \in X'$.

Also ist $\varphi = Id_F : F \to L(.',A)$.

Daher ist $DF = \Omega^*_F(A,.) = L^*(A,.) = L^1(A,.) = \Sigma_{A'}$,

wobei $L^1(A,X) = A' \hat{\otimes} X$ ist.

3) $F = L(A,.) : \underline{A} \to \underline{B}$, $A \in \underline{B}$, wobei $L(A,X) = A' \hat{\hat{\otimes}} X$ der Raum der kompakten Abbildungen $A \to X$ ist. $F(I) = A'$.

$\varphi : F \to \Omega_F(.',A')$ sieht so aus:

$\varphi_X(f)(x') = L(A,x')(f) = x' \circ f = f'(x')$ für

$\varphi_X(f)(x') = L(A,x')(f) = x' \circ f = f'(x')$ für

$f \in L(A,X)$, $x' \in X'$. Also ist $\varphi_X(f) = f'$,

$\Omega_F(.',A') = L(.',A')$, $L(X',A') = X \hat{\hat{\otimes}} A'$.

$DF = \Omega^*_F(A',.) = L^*(A',.) = L^1(b(A'),.) = \Sigma_{A''}$.

4) $F = H_A : \underline{A} \to \underline{B}$, $A \in \underline{A}$. $F(I) = A'$.

$\varphi : F \to \Omega_F(.',A')$

$\varphi_X(f)(x') = H(A,x')(f) = x' \circ f = f'(x')$, $f \in H(A,X)$, $x' \in X'$.

$\varphi_X(f) = f'$.

$DF = \Omega_F^*(A',.) = L^1(A',.) = \Sigma_A$.

Auch dieses Ergebnis findet sich schon bei Mitjagin-Schwartz.

5) $F = H(.',A) : \underline{A} \to \underline{B}$, $A \in \underline{B}$, $F(I) = A$.

F ist schon ein normiertes Halbrechtsideal, $\varphi : F \to H(.',A)$ ist die Identität.

$DF = H^*(A,.)$.

Behauptung $H^*(A,.) = 0$.

Angenommen, es existiert ein $f \in H^*(A,X)$ für $X \in \underline{A}$, $f \neq 0$. Dann gibt es ein $a \in A$ mit $f(a) \neq 0$ in X. Es gibt einen nichtreflexiven Banachraum Y in $\underline{A}$; wähle $y'' \in Y'' \setminus Y$, dann ist $\langle .,y'' \rangle a \in H(Y',A)$ und nicht schwach* stetig.

$f \circ \langle ., y'' \rangle a = \langle ., y'' \rangle f(a) : Y' \to X$ ist auch nicht schwach stetig, aber wenn $f \in H^*(A,X)$ ist, müßte $f \circ \langle ., y'' \rangle a \in L^1(Y',X)$, also doch schwach* stetig sein; Widerspruch.

Daher ist $DF = 0$.

Als Spezialfall ergibt sich : $D('') = 0$.

Zum Abschluß beweisen wir noch ein Resultat, das in die Richtung der lange gesuchten Gleichung $DF = DF_e$ ziehlt.

<u>Satz:</u> Sei $F : \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ ein Funktor und $\varepsilon : F_e \longrightarrow F$ die Einbettung des wesentlichen Teilfunktors. Dann ist für jedes $X \in \underline{A}$ die Abbildung $D(\varepsilon)_X : DF(X) \longrightarrow DF_e(X)$ injektiv (und eine Kontraktion).

<u>Beweis:</u> Sei $\eta \in DF(X)$ und $D(\varepsilon)_X(\eta) = \eta \circ \varepsilon = 0$. Dann ist für jedes $Y \in \underline{A}$, $y \in Y$ und $a \in F(I)$

$$0 = \eta_Y \circ \varepsilon_Y (a \otimes y) = \eta_Y \circ F(\hat{y})\, a$$
$$= (X \hat{\otimes} \hat{y}) \circ \eta_I(a).$$

$\eta_I(a) \in X \hat{\otimes} I$; Sei $y \neq 0$. Dann ist $(X \hat{\otimes} \hat{y}) \circ \eta_I(a) = (\eta_I(a)) \otimes y \in X \otimes Y$, also ist $\eta_I(a) \otimes y = 0$ in $X \hat{\otimes} Y$, daher $\eta_I(a) = 0$ für alle $a \in F(I)$. Weil $X \in \underline{A}$ ist, ist die Abbildung $\jmath_X : \eta \longmapsto \eta_I$ injektiv, also ist $\eta = 0$.

qed.

V. Darstellung von Funktoren durch Limiten.

In (V.1) zeigen wir zunächst, daß das Tensorprodukt von Funktoren $G\hat{\otimes}F$ (siehe (I.1)) sich als induktiver Limes von Räumen $G(X)\hat{\otimes}F(Y)$ in $\underline{B}_1$ darstellen läßt. Wir wiederholen ein Ergebnis von Linton über die Darstellung von n.t.(F,G) als projektiven Limes in $\underline{B}_1$ und benützen dann diese Ergebnisse, um mit Hilfe eines Satzes über "objektweise Berechnung" von Limiten in Funktorkategorien folgende Darstellungssätze über Funktoren abzuleiten:

Jeder kovariante Funktor F ist induktiver Limes von Funktoren $\Sigma_A \circ H_B$. Dieser Satz wurde schon von POKASEJEVA-SHVARTS auf direktem Weg bewiesen.

Jeder kovariante Funktor F ist projektiver Limes von Funktoren $H^A \cdot H^B$.

Jeder kontravariante Funktor G ist induktiver Limes von Funktoren $\Sigma_A \cdot H^B$ und ist projektiver Limes von Funktoren $H^A \cdot H_B$.

Dann verwenden wir ähnliche Überlegungen wie in (III.1), um zu beweisen, daß jeder kovariante Funktor F als induktiver Limes von Funktoren $\sum_{i=1}^{n} H_{A_i}$ darstellbar ist. Ein analoger Satz gilt für kontravariante Funktoren. Dieser Satz wurde schon von MITJAGIN-SHVARTS formuliert, doch der Beweis war falsch wie auch der, der von POKASEJEVA-SHVARTS angegeben wurde.

Zur Definition von Limes und Spektralschar verweisen wir auf III.

(V.1) Darstellung von $G\hat{\otimes}F$ und $\underset{\underline{K}}{\text{n.t.}}\,\mathcal{H}(F,G)$ als Limiten in $\underline{B}_1$

Satz: Sei $\underline{K}$ eine volle Teilkategorie von $\underline{B}$, $G : \underline{K} \to \underline{B}$ ein kontra- und $F : \underline{K} \to \underline{B}$ ein kovarianter Funktor.
Dann kann $G\underset{\underline{K}}{\hat{\otimes}}F$ als induktiver Limes von Räumen $G(X)\hat{\otimes}F(Y)$ in $\underline{B}_1$ dargestellt werden.

Beweis: Indexklasse sei die Klasse aller Morphismen in $\underline{K}_1$.
Jedem $\lambda : X \to Y$ in $\underline{K}_1$ ordnen wir den Banachraum $R^\lambda = G(Y)\hat{\otimes}F(X)$ zu.
Jedes Paar (α,β) von Morphismen in $\underline{K}_1$, für das das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\lambda} & Y \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle\beta} \\ Z & \xrightarrow{\mu} & U \end{array}$$

kommutativ ist,
definiert eine Abbildung $\pi_\lambda^\mu \in \prod_\lambda^\mu : R^\lambda \to R^\mu$ wobei
$\pi_\lambda^\mu = G(\beta)\hat{\otimes}F(\alpha) : G(Y)\hat{\otimes}F(X) \to G(U)\hat{\otimes}F(Z)$ ist. $(R^\lambda, \pi_\lambda^\mu)$ ist klarerweise eine Spektralfamilie. Der Morphismus $\pi_\lambda : R^\lambda \to G\hat{\otimes}F$ ist gegeben durch

$$\pi_\lambda\Big(\sum_{i=1}^n g_Y^i \otimes f_X^i\Big) = \Big(\Big(\sum_{i=1}^n g_Y^i \otimes F(\lambda)\, f_X^i\Big)\delta_{Y,Z}\Big)_{Z\in\underline{K}}$$

$$= \Big(\Big(\sum_{i=1}^n G(\lambda)\, g_Y^i \otimes f_X^i\Big)\delta_{X,Z}\Big)_{Z\in\underline{K}}.$$

Man bemerkt, daß die Differenz beider Elemente in N liegt, also π_λ dadurch wohldefiniert ist, und $\|\pi_\lambda\| \leqslant \|\lambda\|$ gilt.

$$\pi_\mu \circ \pi_\lambda^\mu\Big(\sum_{i=1}^n g_Y^i \otimes f_X^i\Big) =$$

$$= \pi_\mu\Big(\sum_{i=1}^n G(\beta)\, g_Y^i \otimes F(\alpha)\, f_X^i\Big)$$

$$= \Big(\Big(\sum_{i=1}^n G(\mu)\, G(\beta)\, g_Y^i \otimes F(\alpha)\, f_X^i\Big)\delta_{Z,K}\Big)_{K\in\underline{K}}$$

$$= \Big(\Big(\sum_{i=1}^{n} G(\alpha)\ G(\mu)\ G(\beta)\ g_Y^i \otimes f_X^i\Big)\,\delta_{X,K}\Big)_{K\in\underline{K}} \qquad \text{modulo } N$$

$$= \Big(\Big(\sum_{i=1}^{n} G(\beta\mu\alpha)\ g_Y^i \otimes f_X^i\Big)\,\delta_{X,K}\Big)_{K\in\underline{K}}$$

$$= \Big(\Big(\sum_{i=1}^{n} G(\lambda)\ g_Y^i \otimes f_X^i\Big)\,\delta_{X,K}\Big)_{K\in\underline{K}}$$

$$= \pi_\lambda\Big(\sum_{i=1}^{n} g_Y^i \otimes f_X^i\Big).$$

Wir zeigen jetzt, daß $G\hat{\otimes}F = \lim\,(R^\lambda, \pi^\mu_\lambda)$ ist. Sei $A \in \underline{B}_1$ ein beliebiger Banachraum und $\tau_\lambda : R^\lambda \longrightarrow A$ eine Abbildung aus der Spektralfamilie $(R\ , \pi^\mu_\lambda)$ in A; dh es gilt $\tau_\lambda = \tau_\mu \circ \pi^\mu_\lambda$ für jedes $\pi^\mu_\lambda \in \Pi^\mu_\lambda$. Natürlich gelte noch $\|\tau_\lambda\| \leq 1$.

Wir müssen eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\tau : G\hat{\otimes}F \longrightarrow A$ finden mit $\tau_\lambda = \tau \circ \pi_\lambda$

Speziell soll für $X \in \underline{K}$ $\tau_{1_X} = \tau \cdot \pi_{1_X}$ sein; und das definiert schon die Abbildung $\tau := \sum_{X\in\underline{K}} \tau_{1_X} : \sum_{X\in\underline{K}} G(X)\hat{\otimes}F(X) \longrightarrow A.$

Dann ist τ als Summenabbildung der τ_{1_X} linear und Kontraktion.

Wir zeigen, daß $\ker\tau \supseteq N$ gilt, also daß τ sich über $G\hat{\otimes}F$ faktorisieren läßt. N wird erzeugt von Elementen der Form

$$\sum_i G(\lambda)\ g_Y^i \otimes f_X^i \ - \ \sum_i g_Y^i \otimes F(\lambda)\ f_X^i\ ,$$

$$\lambda : X \longrightarrow Y \text{ und } \sum_i g_Y^i \otimes f_X^i \in G(Y)\hat{\otimes}F(X);$$

dabei kann λ ohne weiteres als Kontraktion vorgegeben werden.

Wir haben folgende kommutative Diagramme:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\lambda"'] & Y \\ Y \arrow[r, "1_Y"] & Y \arrow[u, "1_Y"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "1_X"'] & Y \\ X \arrow[r, "1_X"] & X \arrow[u, "\lambda"'] \end{tikzcd}\ ,$$

welche die Morphismen

$\pi_\lambda^{1_Y} = G(1_Y) \hat{\otimes} F(\lambda) \in \prod_\lambda^{1_Y}$ und

$\pi_\lambda^{1_X} = G(\lambda) \hat{\otimes} F(1_X) \in \prod_\lambda^{1_X}$ definieren.

Es gilt $\tau_{1_Y} \circ \pi_\lambda^{1_Y} = \tau_\lambda$ und $\tau_{1_X} \circ \pi_\lambda^{1_X} = \tau_\lambda$.

$$\tau\,(\sum_i G(\lambda)\, g_Y^i \otimes f_X^i - \sum_i g_Y^i \otimes F(\lambda)\, f_X^i)$$

$$= \tau_{1_X}(\sum_i G(\lambda)\, g_Y^i \otimes f_X^i) - \tau_{1_Y}\,(\sum_i g_Y^i \otimes F(\lambda)\, f_X^i)$$

$$= \tau_{1_X} \circ \pi_\lambda^{1_X}\,(\sum_i g_Y^i \otimes f_X^i) - \tau_{1_Y} \circ \pi_\lambda^{1_Y}\,(\sum_i g_Y^i \quad f_X^i)$$

$$= \tau_\lambda(\sum_i g_Y^i \otimes f_X^i) - \tau_\lambda(\sum_i g_Y^i \otimes f_X^i) = 0.$$

Also ist $\tau : G \hat{\otimes} F \longrightarrow A$ wohldefiniert.

Wir zeigen $\tau_\lambda = \tau \circ \pi_\lambda$.

$$\tau \circ \pi_\lambda(\sum_i g_Y^i \otimes f_X^i) =$$

$$= \tau\,((\sum_i G(\lambda)\, g_Y^i \otimes f_X^i)\, \delta_{X,Z})_{Z \in \underline{K}}$$

$$= \tau_{1_X}(\sum_i G(\lambda)\, g_Y^i \otimes f_X^i)$$

$$= \tau_{1_X} \circ \pi_\lambda^{1_X}\,(\sum_i g_Y^i \otimes f_X^i)$$

$$= \tau_\lambda(\sum_i g_Y^i \otimes f_X^i).$$

Also ist $\tau_\lambda = \tau \circ \pi_\lambda$; diese Bedingung hat auch die Gestalt von τ erzwungen, also ist τ eindeutig. qed.

<u>Satz:</u> Sei $\underline{K}$ eine volle Teilkategorie von $\underline{B}$ und $F,G : \underline{K} \longrightarrow \underline{B}$ kovariante Funktoren.

Dann kann $\underset{\underline{K}}{\text{n.t.}}H(F,G)$ als projektiver Limes von Räumen $H(F(X), G(Y))$ in $\underline{B}_1$ dargestellt werden.

<u>Beweis:</u> Indexklasse sei die Klasse aller Morphismen in $\underline{K}_1$. Für $\lambda : X \longrightarrow Y$ in $\underline{K}_1$ sei $P^\lambda = H(F(X), G(Y))$. Jedes Paar (α,β) von Morphismen in $\underline{K}_1$, für das das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\lambda"] & Y \arrow[d, "\beta"] \\
Z \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "\mu"] & U
\end{tikzcd}$$

in $\underline{K}_1$ kommutativ ist,

definiert eine Abbildung $\pi^\mu_\lambda \in \prod^\mu_\lambda : P^\lambda \longrightarrow P^\mu$, wobei

$\pi^\mu_\lambda = H(F(\alpha), G(\beta)) : H(F(X), G(Y)) \longrightarrow H(F(Z), G(U))$ ist.

Der Morphismus $\pi^\lambda : \underset{\underline{K}}{\text{n.t.}}H(F,G) \longrightarrow P^\lambda$ ist gegeben durch

$\pi^\lambda(\eta) = G(\lambda)\circ\eta_X = \eta_Y\circ F(\lambda) \in H(F(X), G(Y))$ für $\eta \in \underset{\underline{K}}{\text{n.t.}}H(F,G)$

Dann sind $\|\pi^\mu_\lambda\| \leq 1$, $\|\pi^\lambda\| \leq 1$ und $\pi^\mu_\lambda \circ \pi^\lambda_\nu \in \prod^\mu_\nu$.

Wir zeigen $\pi^\mu_\lambda \circ \pi^\lambda = \pi^\mu$.

Sei $\eta \in \underset{\underline{K}}{\text{n.t.}}H(F,G)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\pi^\mu_\lambda \circ \pi^\lambda(\eta) &= H(F(\alpha), G(\beta))\,(G(\lambda)\cdot\eta_X). \\
&= G(\beta)\circ G(\lambda)\circ\eta_X\circ F(\alpha) \\
&= G(\beta)\circ G(\lambda)\circ G(\alpha)\circ\eta_Z \\
&= G(\beta\lambda\alpha)\circ\eta_Z \\
&= G(\mu)\circ\eta_Z = \eta_U\circ F(\mu) = \pi^\mu(\eta).
\end{aligned}$$

Wir zeigen, daß $\underset{\underline{K}}{\text{n.t.}}H(F,G) = \varprojlim (P^{\lambda}, \Pi^{\mu}_{\lambda})$ ist.

Sei A ein beliebiger Banachraum und (τ^{λ}) ein Familie von Abbildungen $\tau^{\lambda}: A \longrightarrow P^{\lambda}$ in $\underline{B}_1$ mit $\pi^{\mu}_{\lambda} \circ \tau^{\lambda} = \tau^{\mu}$ für alle $\pi^{\mu}_{\lambda} \in \Pi^{\mu}_{\lambda}$ und λ, μ. Wir müssen eine eindeutig bestimmte Abbildung $\tau : A \longrightarrow \underset{\underline{K}}{\text{n.t.}}H(F,G)$ finden mit $\tau^{\lambda} = \pi^{\lambda} \circ \tau$.

Also muß speziell $\tau^{1_X} = \pi^{1_X} \circ \tau$ für alle $X \in \underline{K}$ erfüllt sein, das heißt:

$$\tau^{1_X}(a) = \pi^{1_X} \circ \tau(a) = \tau(a)_X$$

Das nehmen wir zur Definition von τ : $\tau : A \longrightarrow \underset{\underline{K}}{\text{n.t.}}(F,G)$ ist definiert durch $\tau(a)_X = \tau^{1_X}(a)$ für $a \in A$ und $X \in \underline{K}$.
Dann ist τ linear und $\sup_X \|\tau(a)_X\| \leq \sup \|\tau^{1_X}\| \, \|a\| \leq \|a\|$, also $\|\tau\| \leq 1$. Wir zeigen, daß $X \mapsto \tau(a)_X$ natürlich ist. Sei $\lambda : X \longrightarrow Y$ in $\underline{K}_1$.

Folgende Diagramme sind kommutativ:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "1_X"] & X \arrow[d, "\lambda"] \\ X \arrow[u, "1_X"] \arrow[r, "\lambda"] & Y \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "1_Y"] & Y \arrow[d, "1_Y"] \\ X \arrow[u, "\lambda"] \arrow[r, "\lambda"] & Y \end{tikzcd}$$

und definieren die Abbildungen:

$\pi^{\lambda}_{1_X} = H(F(1_X), G(\lambda)) : P^{1_X} \longrightarrow P^{\lambda}$ und

$\pi^{\lambda}_{1_Y} = H(F(\lambda), G(1_Y)) : P^{1_Y} \longrightarrow P^{\lambda}$.

Es gilt $\pi^{\lambda}_{1_X} \circ \tau^{1_X} = \tau^{\lambda}$ und $\pi^{\lambda}_{1_Y} \circ \tau^{1_Y} = \tau^{\lambda}$, also

$\pi_{1_X}^{\lambda} \circ \tau^{1_X} = \pi_{1_Y}^{\lambda} \circ \tau^{1_Y}$, das heißt für

$a \in A$: $\pi_{1_X}^{\lambda} \tau^{1_X}(a) = H(F(1_X), G(\lambda))(\tau(a)_X) = G(\lambda) \circ \tau(a)_X$

$\pi_{1_Y}^{\lambda} \circ \tau^{1_Y}(a) = H(F(\lambda), G(1_Y))(\tau(a)_Y) = \tau(a)_Y \cdot F(\lambda)$,

also $G(\lambda) \circ \tau(a)_X = \tau(a)_Y \circ F(\lambda)$ und das ist die Bedingung dafür, daß $X \longrightarrow \tau(a)_X$ natürlich ist.

Wir zeigen: $\tau^{\lambda} = \pi^{\lambda} \cdot \tau$ für $\lambda : X \longrightarrow Y$ in $\underline{K}_1$.

Sei $a \in A$; dann ist

$$
\begin{aligned}
\pi^{\lambda} \circ \tau(a) &= G(\lambda)\, \tau(a)_X \\
&= H(F(1_X), G(\lambda))(\tau(a)_X) \\
&= \pi_{1_X}^{\lambda} \circ \tau^{1_X}(a) \\
&= \tau^{\lambda}(a).
\end{aligned}
$$

Also ist die Gestalt von τ hinreichend für die Faktorierung von (τ^{λ}) über τ zu π^{λ} ; sie ist aber dafür auch notwendig, denn sie wurde aus dieser Forderung hergeleitet; damit ist τ eindeutig. qed.

Dieser Satz stammt von Linton.

Der genau analoge Satz gilt für kontravariante Funktoren F und G (man bilde $\underline{K}^{op}$).

(V.2) Darstellung von Funktoren als Limiten von Funktoren $\Sigma_A \circ H_B$, $\Sigma_A \circ H^B$, $H^A \circ H^B$, $H^A \circ H_B$ in Funkt $(\underline{K}_1, \underline{B}_1)$.

$\underline{K}$ sei eine volle Teilkategorie $\underline{B}$. Im folgenden kann $\underline{K}_1$ immer durch eine beliebige Kategorie $\underline{C}$ ersetzt werden, wenn die Funktoren

$\underline{K} \longrightarrow \underline{B}$ durch Funktoren $\underline{C} \longrightarrow \underline{B}_1$ ersetzt werden.

Zunächst führen wir ein Resultat von Mitjagin-Schwartz an, das wir auch beweisen, weil wir später auf Details zurückgreifen müssen.

<u>Satz 1:</u> $(S^\lambda, \pi^\lambda_\mu)$ sei eine Spektralfamilie in Funkt $(\underline{K}_1, \underline{B}_1)$, die nur aus kovarianten (kontravarianten) Funktoren besteht. Wenn für jedes $X \in \underline{K}$ der induktive (projektive) Limes der Spektralfamilie $(S^\lambda(X), \pi^\lambda_\mu(X) = \{\pi^\lambda_{\mu X}, \pi^\lambda_\mu \in \Pi^\lambda_\mu\})$ existiert, dann existiert auch der induktive (projektive) Limes der Spektralfamilie $(S^\lambda, \Pi^\lambda_\mu)$ und für jedes $X \in \underline{K}$ gilt:

$$[\varinjlim (S^\lambda, \pi^\lambda_\mu)]\,(X) = \varinjlim (S\,(X), \pi^\lambda_\mu(X))$$

$$([\varprojlim (S^\lambda, \pi^\lambda_\mu)]\,(X) = \varprojlim (S\,(X), \pi^\lambda_\mu(X))).$$

<u>Beweis:</u> Wir bewiesen nur die Aussage für kovariante Funktoren und induktive Limiten - der Rest geht analog.

Wir definieren den Funktor $F : \underline{K} \longrightarrow \underline{B}$ durch $F(X) = \varinjlim (S^\lambda(X), \pi^\lambda_\mu(X))$ für $X \in \underline{K}$, vermittelt durch $\pi_\lambda(X) : S^\lambda(X) \longrightarrow F(X)$.

Sei $f : X \longrightarrow Y$ in $\underline{K}_1$. Dann ist die Familie $(\pi_\lambda(Y) \circ S^\lambda(f)) : S^\lambda(X) \longrightarrow S^\lambda(Y) \longrightarrow F(Y)$ eine Abbildung aus der Spektralfamilie $(S^\lambda(X), \pi^\lambda_\mu(X))$ in $F(Y)$, denn

$$\pi_\lambda(Y) \circ S^\lambda(f) \circ \pi^\lambda_\mu(X) = \pi_\lambda(Y) \circ \pi^\lambda_\mu(Y) \circ S^\mu(f) = \pi_\mu(Y) \circ S^\mu(f),$$

weil $\pi^\lambda_\mu : S^\lambda \longrightarrow S^\mu$ eine natürliche Transformation ist. Daher gibt es genau einen Morphismus $F(f) : F(X) = \varinjlim (S^\lambda(X), \pi^\lambda_\mu(X)) \longrightarrow F(Y)$, der $\pi_\lambda(Y) \circ S^\lambda(f) = F(f) \circ \pi_\lambda(X)$ erfüllt. Aus dieser Gleichung folgt auch schon, daß $\pi_\lambda : S^\lambda \longrightarrow F$ eine natürliche Transformation ist.

$\| F(f) \| \leqslant \| f \|$ gilt, weil $F(\frac{1}{\|f\|} f)$ $\underline{B}_1$-Morphismus ist, also $\| F(\frac{1}{\|f\|} f) \| \leqslant 1$ gilt.

Die restlichen Eigenschaften eines Funktors: F ist linear,

$F(f\circ g) = F(f).F(g)$ und $F(1_X) = 1_{F(X)}$ folgen aus dieser Eindeutigkeit.

Der Rest des Beweises ist Standardargumentation:

Man berechnet alles objektweise.

<u>Satz **2**:</u> Sei $F : \underline{K} \longrightarrow \underline{B}$ ein kovarianter Funktor. Dann ist F induktiver Limes einer Spektralfamilie von Funktoren der Gestalt $\Sigma_{F(X)} \circ H_Y$ in Funkt $(\underline{\mathbf{K}}_1, \underline{B}_1)$.

<u>Beweis:</u> Nach Satz 2 von Cigler ist $H \mathbin{\hat{\otimes}_{\underline{K}}} F = F$, also $H^A \mathbin{\hat{\otimes}_{\underline{K}}} F = F(A)$ für $A \in \underline{K}$.

Nach (V.1) ist

$$H^A \mathbin{\hat{\otimes}_{\underline{K}}} F = \varinjlim \; (R^\lambda(A), \Pi^\mu_\lambda(A)),$$

wobei für $\lambda : X \longrightarrow Y$ in $\underline{K}_1$ der Raum $R^\lambda(A) = H(Y,A) \hat{\otimes} F(X)$ ist, $\pi^\mu_\lambda(A) \in \Pi^\mu_\lambda(A) : R^\lambda(A) \longrightarrow R^\mu(A)$ durch das kommutative Diagramm

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \\ Z \arrow[r, "\mu"] & U \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

in $\underline{K}_1$ und die Gleichung $\pi^\mu_\lambda(A) = H(\beta, A) \hat{\otimes} F(\alpha)$ gegeben ist und der induktive Limes durch die Abbildungen $\pi_\lambda(A) : R^\lambda(A) \longrightarrow H^A \mathbin{\hat{\otimes}_{\underline{K}}} F$ vermittelt wird. Dabei ist

$$\pi_\lambda(A) \; (\sum_i h^i_Y \otimes f^i_X) = ((\sum_i h^i_Y \otimes F(\lambda) \; f^i_X) \, \delta_{Y,Z})_{Z \in \underline{K}}$$

$$= ((\sum_i h^i_Y \circ \lambda \mathbin{\hat{\otimes}} f^i_X) \, \delta_{X,Z})_{Z \in \underline{K}}$$

für $\sum_i h^i_Y \otimes f^i_X \in H(Y,A) \hat{\otimes} F(X)$.

$(R^\lambda, \Pi^\mu_\lambda)$ sei definiert für $\lambda : X \longrightarrow Y$ in $\underline{K}_1$ durch

$R^\lambda = H(Y,.)\hat{\otimes} F(X) = \Sigma_{F(X)} \circ H_Y$ und $\pi^\mu_\lambda \in \Pi^\mu_\lambda : R^\lambda \longrightarrow R^\mu$ durch das Diagramm (*) und

$$\pi^\mu_\lambda = H(\beta,.)\hat{\otimes} F(\alpha).$$

Dann ist $(R^\lambda, \pi^\mu_\lambda)$ eine Spektralfamilie und für jedes $A \in \underline{K}$ existiert $\varinjlim (R^\lambda(A), \pi^\mu_\lambda(A))$ und ist gleich $F(A)$. Daher existiert $\varinjlim (R^\lambda, \pi^\mu_\lambda)$ und $[\varinjlim (R^\lambda, \pi^\mu_\lambda)](A) = F(A)$ nach Satz 1, wobei der induktive Limes durch $\pi_\lambda : R^\lambda \longrightarrow H\hat{\otimes}F = F$ vermittelt wird. Wir müssen noch zeigen, daß für

$\varphi : A \longrightarrow B$ in $\underline{K}$ $\quad [\varinjlim (R^\lambda, \pi^\lambda_\mu)](\varphi) = H\hat{\otimes}F(\varphi) = F(\varphi)$ ist.

$[\varinjlim (R^\lambda, \pi^\mu_\lambda)](\varphi)$ ist die eindeutige Abbildung, zu der die Familie $\pi_\lambda(B) \circ R^\lambda(\varphi) : R^\lambda(A) \longrightarrow R^\lambda(B) \longrightarrow H\hat{\otimes}F(B)$ faktoriert.

Nun ist aber für $\sum_i h^i_Y \otimes f^i_X \in R^\lambda(A)$:

$$H\hat{\otimes}F(\varphi) \circ \pi_\lambda(A) \left(\sum_i h^i_Y \otimes f^i_X\right)$$

$$= H(.,\varphi)\hat{\otimes}F \left(\left(\sum_i h^i_Y \circ \lambda \otimes f^i_X\right) \delta_{X,Z}\right)_{Z \in \underline{K}}$$

$$= \left(\sum_i \varphi \circ h^i_Y \circ \lambda \otimes f^i_X\right) \delta_{X,Z}\Big)_{Z \in \underline{K}}$$

$$= \pi_\lambda(B) \left(\sum_i \varphi \circ h^i_Y \hat{\otimes} f^i_X\right)$$

$$= \pi_\lambda(B) \circ H(Y,\varphi)\hat{\otimes} F(X) \left(\sum_i h^i_Y \otimes f^i_X\right)$$

$$= \pi_\lambda(B) \circ R^\lambda(\varphi) \left(\sum_i h^i_Y \otimes f^i_X\right),$$

also $H\hat{\otimes}F(\varphi) \circ \pi_\lambda(A) = \pi_\lambda(B) \circ R^\lambda(\varphi)$.

$(H\hat{\otimes}F(\varphi) \circ \pi_\lambda(A))$ ist eine Abbildung $(R^\lambda(A), \pi^\mu_\lambda(A)) \longrightarrow H\hat{\otimes}F(B)$ und faktoriert eindeutig zu $H\hat{\otimes}F(\varphi)$; also auch $(\pi_\lambda(B) \circ R^\lambda(\varphi))$.

Damit ist $[\varinjlim (R^\lambda, \pi^\mu_\lambda)](\varphi) = H\hat{\otimes}F(\varphi) = F(\varphi)$ und der Satz bewiesen.

Dieser ist bekannt. Er wurde von Pokasejeva-Schwartz durch direkten Ansatz bewiesen. Wir haben hier einen Beweis über das Tensorprodukt von Funktoren gegeben, der vielleicht nicht kürzer, doch einsichtiger ist. Nun formulieren wir denselben Satz für kontravariante Funktoren.

<u>Satz 3:</u> Sei $G : \underline{K} \longrightarrow \underline{B}$ ein kontravarianter Funktor. Dann ist G als induktiver Limes von Funktoren der Gestalt $\Sigma_{G(Y)} \circ H^X$ in Funkt $(\underline{K}_1, \underline{B}_1)$ darstellbar.

<u>Beweis:</u> Nach Cigler, Satz 2, gilt $G \mathop{\hat{\otimes}}_{\underline{K}} H = G$, und $G \hat{\otimes} H_A = \varinjlim (R^\lambda(A), \Pi^\lambda_\mu(A))$, wobei $R^\lambda(A) = G(Y) \hat{\otimes} H(A,X)$ ist für $\lambda : X \longrightarrow Y$ in $\underline{K}_1$. Genauso wie bei Satz 2 folgt, daß die Spektralfamilie $(R^\lambda, \Pi^\lambda_\mu)$ F als induktiven Limes hat, wobei für $\lambda : X \longrightarrow Y$ in $\underline{K}_1$.
$R^\lambda = G(Y) \hat{\otimes} H(.,X) = \Sigma_{G(Y)} \circ H^X$ ist und das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \\ Z \arrow[r, "\mu"] & U \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

die natürliche Transformation

$\pi^\lambda_\mu = G(\beta) \hat{\otimes} H(.,\alpha) \in \Pi^\lambda_\mu$ bestimmt.

Der induktive Limes ist gegeben durch $\pi_\lambda : R^\lambda \longrightarrow G\hat{\otimes}H$,

$$\pi_\lambda(A) \quad (\sum_i g^i_Y \otimes h^i_X) = ((\sum_i G(\lambda) \; g^i_Y \otimes h^i_X) \, \delta_{X,Z})_{Z \in \underline{K}}$$

$$= ((\sum_i g^i_Y \hat{\otimes} \lambda \circ h^i_X) \, \delta_{Y,Z})_{Z \in \underline{K}}$$

für $\sum_i g^i_Y \otimes h^i_X \in R^\lambda(A) = G(Y) \hat{\otimes} H(A,X)$. qed.

Satz 4: Sei $F : \underline{K} \longrightarrow \underline{B}$ ein kovarianter Funktor. Dann ist F als projektiver Limes von Funktoren der Gestalt $H^{F(Y)} \circ H^X$ in Funkt $(\underline{K}_1, \underline{B}_1)$ darstellbar.

Beweis: Wir verwenden das Yoneda-Lemma:

$F = \underset{\underline{K}}{\text{n.t.}}H(H,F)$, $\underset{\underline{K}}{\text{n.t.}}H(H_A,F) = F(A)$. Jeder Raum $\underset{\underline{K}}{\text{n.t.}}H(H_A,F)$ ist projektiver Limes der Spektralfamilie

$(P^\lambda(A), \Pi^\lambda_\mu(A))$ in $\underline{B}_1$, wobei für $\lambda : X \longrightarrow Y$ in $\underline{K}_1$

$P^\lambda(A) = H(H(A,X), F(Y))$ ist und ein kommutatives Diagramm:

$$(**) \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\lambda"] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ Z \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "\mu"] & U \end{tikzcd}$$

in $\underline{K}_1$ eine

Abbildung $\Pi^\lambda_\mu(A) = H(H(A,\alpha), F(\beta)) \in \Pi^\lambda_\mu(A)$:

$P^\lambda(A) \longrightarrow P^\mu(A)$ bestimmt. Der projektive Limes ist festgelegt durch die Abbildungen $\Pi^\lambda(A) : \underset{\underline{K}}{\text{n.t.}}H(H_A,F) \longrightarrow P^\lambda(A)$, definiert durch $\Pi^\lambda(A)(\eta) = F(\lambda) \circ \eta_X = \eta_Y \circ H(A,\lambda)$ für $\eta \in \underset{\underline{K}}{\text{n.t.}}H(H_A,F)$.

Die Spektralfamilie $(P^\lambda, \Pi^\lambda_\mu)$ in Funkt $(\underline{K}_1, \underline{B}_1)$, gegeben durch $P^\lambda = H(H(.,X), F(Y)) = H^{F(Y)} \circ H^X$ für $\lambda : X \longrightarrow Y$ in $\underline{K}_1$ und $\pi^\lambda_\mu = H(H(.,\alpha), F(\beta)) \in \Pi^\lambda_\mu : P^\lambda \longrightarrow P^\mu$ für ein Diagramm $(**)$ erfüllt also die Bedingungen von Satz 1.

Daher existiert $\underleftarrow{\lim}\, (P^\lambda, \Pi^\lambda_\mu)$ in Funkt $(\underline{K}_1, \underline{B}_1)$ und

$[\underleftarrow{\lim}\, (P^\lambda, \Pi^\lambda_\mu)](A) = \underset{\underline{K}}{\text{n.t.}}H(H_A,F) = F(A)$ für jedes $A \in \underline{K}$.

Wir müssen noch zeigen, daß für $\varphi : A \longrightarrow B$ in $\underline{K}$ die Gleichung:

$$[\underleftarrow{\lim}\, (P^\lambda, \Pi^\lambda_\mu)](\varphi) = \underset{\underline{K}}{\text{n.t.}}H(H_\varphi,F) = F(\varphi) \text{ gilt.}$$

$[\lim\, (P^\lambda, \Pi^\lambda_\mu)](\varphi)$ ist der eindeutig bestimmte Morphismus

$\underset{\underline{K}}{\text{n.t.}}H(H_A,F) \longrightarrow \underset{\underline{K}}{\text{n.t.}}H(H_B,F)$ zu welchem die Familie von Abbildungen $P^\lambda(\varphi)\circ\pi^\lambda(A)\colon \underset{\underline{K}}{\text{n.t.}}H(H_A,F) \longrightarrow P^\lambda(A) \longrightarrow P^\lambda(B)$ faktorisiert:

$$P^\lambda(\varphi)\circ\pi^\lambda(A) = \pi^\lambda(B)\circ\left[\varprojlim\,(P^\lambda,\pi^\lambda_\mu)\right](\varphi).$$

Nun gilt aber für $\eta \in \underset{\underline{K}}{\text{n.t.}}H(H_A,F)$; $\pi^\lambda(B)\circ \underset{\underline{K}}{\text{n.t.}}H(H_\varphi,F)\;(\eta)$

$$\begin{aligned}
&= \pi^\lambda(B)\;(\eta\circ H(\varphi,.)) = \\
&= F(\lambda)\circ\eta_X\circ H(\varphi,X) \\
&= H(H(\varphi,X),\,F(Y))\;(F(\lambda)\circ\eta_X) \\
&= P^\lambda(\varphi)\circ\pi^\lambda(A)\;(\eta).
\end{aligned}$$

Also gilt $\pi^\lambda(B)\circ\underset{\underline{K}}{\text{n.t.}}H(H_\varphi,F) = P^\lambda(\varphi)\circ\pi^\lambda(A)$, daher ist wegen der Eindeutigkeit der Faktorisierung

$$\left[\varprojlim\,(P^\lambda,\pi^\lambda_\mu)\right](\varphi) = \underset{\underline{K}}{\text{n.t.}}(H_\varphi,F) = F(\varphi)$$

und der Satz bewiesen.

Der analoge Satz gilt natürlich für kontravariante Funktoren:

<u>Satz 5:</u> Sei $G : \underline{K} \longrightarrow \underline{B}$ ein kontravarianter Funktor. Dann ist G als projektiver Limes von Funktoren der Gestalt $H^{G(X)}\circ H_Y$ in $\mathrm{Funkt}\,(\underline{K}_1,\underline{B}_1)$ darstellbar.

<u>Beweis:</u> Wir benutzen das Yoneda-Lemma für kontravariante Funktoren:

$\underset{\underline{K}}{\text{n.t.}}H(H,G) = G, \quad \underset{\underline{K}}{\text{n.t.}}H(H^A,G) = G(A).$

Jeder Raum $\underset{\underline{K}}{\text{n.t.}}H(H^A,G)$ ist projektiver Limes der Spektralfamilie $(P^\lambda(A),\,\pi^\lambda_\mu(A))$, wobei $P^\lambda(A) = H(H(Y,A),\,G(X))$ für $\lambda : X \longrightarrow Y$ in $\underline{K}_1$ ist.

Genauso wie in Satz 4 folgt, daß G projektiver Limes der Spektralfamilie $(P^{\lambda}, \Pi^{\lambda}_{\mu})$ in Funkt $(\underline{K}_1, \underline{B}_1)$ ist, wobei

$P^{\lambda} = H(H(Y,.), G(X)) = H^{G(X)} \circ H_Y$ ist für $\lambda : X \longrightarrow Y$ in $\underline{K}_1$ und

ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\lambda} & Y \\ {\scriptstyle\alpha}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ Z & \xrightarrow{\mu} & U \end{array} \qquad \text{in } \underline{K}_1$$

eine Abbildung $\pi^{\lambda}_{\mu} = H(H(\beta,.), G(\alpha)) \in \Pi^{\lambda}_{\mu}$ bestimmt. Der projektive Limes ist gegeben durch die natürliche Transformation

$$\pi^{\lambda} : G = \underset{\underline{K}}{\text{n.t.}} H(H,G) \longrightarrow P^{\lambda}$$

$$\pi^{\lambda}(A)(\eta) = G(\lambda)\eta_Y = \eta_X \circ H(\lambda, A)$$

für $\eta \in \text{n.t.}H(H^A, G) = G(A)$. qed.

(V.3) <u>Jeder Funktor ist induktiver Limes von Funktoren $\sum_{i=1}^{n} H_{A_i}$</u>

Wir beweisen folgenden

<u>Satz:</u> Sei $F:\underline{K} \longrightarrow \underline{B}$ ein kovarianter Funktor. Dann ist F in Funkt $(\underline{K}_1, \underline{B}_1)$ als induktiver Limes von Funktoren $\sum_{i=1}^{n} H_{A_i}$ darstellbar, wobei $\sum_{i=1}^{n} H_{A_i}(X) = \sum_{i=1}^{n} H(A_i, X)$ ist.

Die Beweisidee hat sich aus der von (III.1), d.h. direkte Summe und Differenzkern, entwickelt.

<u>Beweis:</u> Wir definieren zunächst die Spektralschar. Ihre Indexklasse Ω besteht aus zwei disjunkten Teilen Δ und Λ. Λ ist die Klasse aller

$\lambda = \left\{(X_i, x_i)_{i=1}^{n}\right\}$, wobei $X_i \in \underline{K}$ und $x_i \in \mathcal{O}F(X_i)$ für $i=1,\dots,n$ ist.

Für jedes $\lambda \in \Lambda$ ist der Funktor $R^{\lambda} : \underline{K}_n \longrightarrow \underline{B}$ gegeben durch

$R^{\lambda} = \sum_{i=1}^{n} H(X_i,.)$, wobei $\sum$ das Coprodukt in $\underline{B}$ bezeichnet, also $R^\lambda(X) = \sum_{i=1}^{n} H(X_i,X)$ und $R^\lambda(f) = \sum H(X_i,f)$.

Die Abbildung $\Pi_\lambda : R^\lambda \longrightarrow F$ ist für $A \in \underline{K}$ durch $\Pi_\lambda(A)\,((f_i)_{i=1}^{n}) =$
$= \sum_{i=1}^{n} F(f_i)x_i$ für $((f_i)_{i=1}^{n}) \in \sum_{i=1}^{n} H(X_i,A) = R^\lambda(A)$ gegeben.

$\Pi_\lambda(A)$ ist als Summenabbildung der Bewertungsabbildungen $f: \rightarrow F(f_i)x_i$ linear und von Norm $\leqslant 1$, da alle $\|x_i\| \leqslant 1$ sind.

Wir zeigen: $A \longmapsto \Pi_\lambda(A)$ ist natürlich:

Sei $g : A \longrightarrow B$ in $\underline{K}$ und $((f_i)_{i=1}^{n}) \in \sum_{i=1}^{n} H(X_i,A) = R^\lambda(A)$

Dann ist

$$\Pi_\lambda(B) \circ R^\lambda(g)((f_i)_{i=1}^{n})$$
$$= \Pi_\lambda(B) \circ \sum_{i=1}^{n} H(X_i,g)\ ((f_i)_{i=1}^{n})$$
$$= \Pi_\lambda(B)((g\circ f_i)_{i=1}^{n})$$
$$= \sum_{i=1}^{n} F(g\circ f_i)x_i$$
$$= F(g) \sum_{i=1}^{n} F(f_i)x_i$$
$$= F(g)\Pi_\lambda(A)\ ((f_i)_{i=1}^{n}).$$

Die Indexklasse Λ sei halbgeordnet durch Inklusion:
Für $\lambda = \{(X_i,x_i)_{i=1}^{n}\} \subseteq \lambda' = \{(X_i,x_i)_{i=1}^{n+k}\}$ sei $\Pi_\lambda^{\lambda'} : R^{\lambda'} \longrightarrow R^\lambda$ die kanonische Einbettung der Teilsumme:

$$\sum_{i=1}^{n} H(X_i,.) \longrightarrow \sum_{i=1}^{n+k} H(X_i,.).$$

Δ hingegen sei die Klasse aller $\delta = (\lambda, X, \bar f)$ für $\lambda = \{(X_i x_i)_{i=1}^{n}\} \in \Lambda$, $X \in \underline{K}$ und $\bar f = ((f_i)_{i=1}^{n}) \in \bigcirc R^\lambda(X) = \bigcirc \sum_{i=1}^{n} H(X_i,X)$ mit
$\Pi_\lambda(X)\ \bar f = \sum_{i=1}^{n} F(f_i)x_i = 0$.

Der Funktor $R^\delta : \underline{K} \longrightarrow \underline{B}$ sei durch $R^\delta = H(X,.)$ definiert.

Für $\delta \neq \delta'$ in Δ sei $\Pi_\delta^{\delta'} = \emptyset$ und für $\delta = (\lambda, X, \bar f)$ wie oben sei $\Pi_\delta^\lambda : R^\delta \longrightarrow R^\lambda$ definiert durch $\Pi_\delta^\lambda = \{\pi_\delta^\lambda,\ 0\}$, also eine zweielementige Menge, wobei $\pi_\delta^\lambda: R^\delta \to R^\lambda$ für $h \in R^\delta(A)$, $A \in \underline{K}$ durch

$$\pi_\delta^\lambda(A)\ (h) = R^\lambda(h)\ (\bar{f}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} H(X_i, h)\ (\bar{f})$$

$$= ((h \circ f_i)_{i=1}^{n}) \in R^\lambda(A)$$

definiert.

Für $\lambda' \geq \lambda$ sei $\pi_\delta^{\lambda'} = \{\pi_\lambda^{\lambda'} \circ \pi_\delta^\lambda, 0\}$, sodaß also $(R^\omega, \pi_\omega^{\omega'})_{\omega \in \Omega = \Delta \cup \Lambda}$ eine Spektralfamilie ist.

Die Abbildung $\pi_\delta : R^\delta \to F$ sei die Nullabbildung; da klarerweise $(\pi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Abbildung aus der Spektralfamilie $(R^\lambda, \pi_\lambda^{\lambda'})_{\lambda \in \Lambda}$ in F ist und $\pi_\lambda \circ \pi_\delta^\lambda = 0$ ist, ist insgesamt $(\pi_\omega)_{\omega \in \Omega}$ eine Abbildung $(R^\omega, \pi_\omega^{\omega'})_{\omega \in \Omega} \to F$:

$$\pi_\lambda(A) \circ \pi_\delta^\lambda(A)\ (h) = \pi_\lambda(A) \circ R^\lambda(h)\ (\bar{f})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} F(h \circ f_i)\ x_i$$

$$= F(h) \sum_{i=1}^{n} F(f_i) x_i$$

$$= F(h) \pi_\lambda(X)\ (\bar{f}) = 0.$$

Wir zeigen nun, daß F der induktive Limes der Spektralfamilie $(R^\omega, \pi_\omega^{\omega'})_{\omega \in \Omega}$ in Funkt $(\underline{K}_1, \underline{B}_1)$ ist:

Sei G ein kovarianter Funktor und $(\tau_\omega)_{\omega \in \Omega} : (R^\omega, \pi_\omega^{\omega'}) \to G$ eine Abbildung aus der Spektralfamilie in G, das heißt $\tau_\omega : R^\omega \to G$ in Funkt $(\underline{K}_1, \underline{B}_1)$ und $\tau_{\omega'} \circ \pi_\omega^{\omega'} = \tau_\omega$ für $\omega \geq \omega'$ in Ω.

Wir müssen eine eindeutig bestimmte natürlibhe Transformation $\tau : F \to G$ mit $\tau_\omega = \tau \circ \pi_\omega$ für $\omega \in \Omega$ finden.

Diese Bedingung können wir schon als Definition verwenden:

Für $f_A \in F(A)$ sei $\tau_A\ (f_A) = \tau_\omega(A)\ (\bar{f})$ für ein solches $\omega \in \Omega$ und $\bar{f} \in R^\omega(A)$, daß $\pi_\omega(A)\ (\bar{f}) = f_A \in F(A)$ ist.

Da für $\lambda = \{(A, \frac{1}{\|f_A\|} f_A)\} \in \Lambda$ und

$\bar{f} = \|f_A\| \; 1_A \in R^\lambda(A) = H(A,A)$

$\pi_\lambda(A)\;(\bar{f}) = \|f_A\| \; F(1_A) \frac{1}{\|f_A\|} f_A = f_A$ ist, ist τ_A damit für jedes $f_A \in F(A)$ definiert, wir müssen jedoch noch zeigen, daß τ_A wohldefiniert ist. Da für $\delta \in \Delta$ $\pi_\delta = 0$ ist, müssen wir zunächst zeigen, daß alle $\tau_\delta = 0$ sind.

Das folgt aus: $\tau_\delta = \tau_\lambda \circ \pi_\delta^\lambda$ für $\delta = (\lambda, X, f)$, also für $0 \in \pi_\delta^\lambda : \tau_\delta = \tau_A \circ 0 = 0$.

Seien jetzt, $\lambda, \lambda' \in \Lambda$, $\bar{f} \in R^\lambda(A)$ und $\bar{g} \in R^{\lambda'}(A)$ und

$\pi_\lambda(A)\;(\bar{f}) = f_A = \pi_{\lambda'}(A)\;(\bar{g}) \in F(A)$.

Wir müssen zeigen, daß dann $\tau_\lambda(A)\;(\bar{f}) = \tau_{\lambda'}(A)\;(\bar{g}) \in G(A)$ gilt.

Dazu bilden wir $\mu = \lambda \cup \lambda'$.

Dann ist $\pi_\mu(A)\;(\pi_\lambda^\mu(A)\;(\bar{f}) - \pi_{\lambda'}^\mu(A)(\bar{g}))$

$= \pi_\mu(A)\,\pi_\lambda^\mu(A)\;(\bar{f}) - \pi_\mu(A)\,\pi_{\lambda'}^\mu(A)(\bar{g})$

$= \pi_\lambda(A)(\bar{f}) - \pi_{\lambda'}(A)\;(\bar{g}) = 0$

Sei $r = \|\pi_\lambda^\mu(A)\;(\bar{f}) - \pi_{\lambda'}^\mu(A)\;(\bar{g})\|_{R^\mu(A)}$ und $\bar{h} = \frac{1}{r}\,(\pi_\lambda^\mu(A)(\bar{f}) - \pi_{\lambda'}^\mu(A)(\bar{g}))$ $\in O\,R^\mu(A)$.

Dann $\pi_\mu(A)\;(\bar{h}) = 0$ und es existiert ein Index $\delta = (\mu, A, \bar{h}) \in \Delta$.

Für $r.1_A \in R^\delta(A) = H(A,A)$ gilt:

$0 = \theta(r.1_A) = \tau_\delta(A)\;(r.1_A)$

$= \tau_\mu(A) \circ \pi_\delta^\mu(A)\;(r.1_A)$

$= \tau_\mu(A)\;R^\mu(r.1_A)\;(\bar{h})$

$= \tau_\mu(A)\;(r.\bar{h})$

$= \tau_\mu(A)\,\pi_\lambda^\mu(A)(\bar{f}) - \tau_\mu(A)\,\pi_{\lambda'}^\mu(A)\;(\bar{g})$

$= \tau_\lambda(A)\;(\bar{f}) - \tau_{\lambda'}(A)(\bar{g})$,

also $\tau_\lambda(A)(f) = \tau_{\lambda'}(A)(g)$.

Damit ist $\tau_A : F(A) \longrightarrow G(A)$ wohldefiniert.

Nun zeigen wir, daß τ_A linear ist.

τ_A ist homogen, da für $\lambda \in \Lambda$ und $\bar{f} \in R^\lambda(A)$ mit $\pi_\lambda(A)\;(\bar{f}) = f_A \in F(A)$

$\pi_\lambda(A)\ (r\bar{f}) = rf_A \in F(A)$ gilt und daher $\tau_A(r\,f_A) = \tau_\lambda(A)\ (r\cdot\bar{f}) =$
$r\cdot\tau_\lambda(A)\ (\bar{f}) = r\cdot\tau_A(f_A)$.

Wir zeigen, daß τ_A additiv ist:
Seien f_A, $g_A \in F(A)$, dann existieren $\lambda, \lambda' \in \Lambda$, $\bar{f} \in R^\lambda(A)$, $\bar{g} \in R^{\lambda'}(A)$ mit
$\pi_\lambda(A)\ (\bar{f}) = f_A$, $\pi_{\lambda'}(A)\ (\bar{g}) = g_A$.
Sei wieder $\mu = \lambda \vee \lambda'$. Dann ist

$$\pi_\mu(A)\,\pi^\mu_\lambda(A)\ (\bar{f}) = \pi_\lambda(A)\ (\bar{f}) = f_A$$

$$\pi_\mu(A)\,\pi^\mu_{\lambda'}(A)\ (\bar{g}) = \pi_{\lambda'}(A)\ (\bar{g}) = g_A \quad \text{und}$$

$$\pi_\mu(A)(\pi^\mu_\lambda(A)\ (\bar{f}) + \pi^\mu_{\lambda'}(A)\ (\bar{g})) = f_A + g_A,$$

daher ist

$$\begin{aligned}
\tau_A(f_A + g_A) &= \tau_\mu(A)\ (\pi^\mu_\lambda(A)(\bar{f}) + \pi^\mu_{\lambda'}(A)\ (\bar{g})) \\
&= \tau_\mu(A)\,\pi^\mu_\lambda(A)\ (\bar{f}) + \tau_\mu(A)\,\pi^\mu_{\lambda'}(A)\ (\bar{g}) \\
&= \tau_\lambda(A)\ (\bar{f}) + \tau_{\lambda'}(A)\ (\bar{g}) \\
&= \tau_A(f_A) + \tau_A\ (g_A).
\end{aligned}$$

Wir zeigen: $\|\tau_A\| \leqslant 1$.
Sei $f_A \in F(A)$, $\|f_A\| \leqslant 1$. Dann existiert ein $\lambda \in \Lambda$ und $\bar{f} \in R^\lambda(A)$ mit
$\|\bar{f}\|_{R^\lambda(A)} \leqslant 1$ (siehe oben) und $\pi_\lambda(A)\ (\bar{f}) = f_A$.
Daher ist $\|\tau_A\ (f_A)\| = \|\tau_\lambda(A)\ (\bar{f})\| \leqslant \|\bar{f}\| \leqslant 1$, also $\|\tau_A\| \leqslant 1$.

Wir zeigen, daß $A \mapsto \tau_A$ natürlich ist. Sei $g : A \longrightarrow B$ in $\underline{K}$ und
$f_A \in F(A)$. Es gibt $\lambda \in \Lambda$ und $\bar{f} \in R^\lambda(A)$ mit $\pi_\lambda(A)\ (\bar{f}) = f_A$. Weil
$\pi_\lambda : R^\lambda \longrightarrow F$ eine natürliche Transformation ist, gilt

$$\begin{aligned}
F(g)f_A &= F(g)\,\pi_\lambda(A)\ (\bar{f}) = \\
&= \pi_\lambda(B)\ R^\lambda(g)\ (\bar{f}), \text{ also}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_B \circ F(g)\ f_A &= \tau_\lambda(B)\ R^\lambda(g)\ (\bar{f}) \\
&= G(g)\ \tau_\lambda(A)\ (\bar{f}) \\
&= G(g)\,\tau_A\ (f_A),
\end{aligned}$$

weil auch $\tau_\lambda : R^\lambda \longrightarrow G$ natürlich ist. Diese Gleichung zeigt, daß $\tau : F \rightarrow G$ eine natürliche Transformation ist. Schon nach Definition gilt $\tau_A \circ \pi_\lambda(A) = \tau_\lambda(A)$, also $\tau \circ \pi_\lambda = \tau_\lambda$ und auch die Eindeutigkeit von τ folgt bereits aus der Definition.

Wir haben also den Funktor F als induktiven Limes der Funktoren R^λ und R^δ dargestellt; dabei sind die R^δ für $\delta = (\lambda, X, \bar{f})$ gleich H_X, die R^λ jedoch sind Funktoren der Gestalt $\sum_{i=1}^{n} H(X_i,.)$; es ist nicht gelungen, in kanonischer Weise einen Banachraum Z zu finden, sodaß der obige Funktor gleich $H(Z,.)$ wäre, und das ist ein gewisser Schönheitsfehler dieses Satzes.

qed

Auf analoge Weise beweißt man den folgenden

<u>Satz</u>: Sei $G:\underline{K} \rightarrow \underline{B}$ ein kontravarianter Funktor. Dann ist G in $\mathrm{Funkt}(\underline{K}_1, \underline{B}_1)$ induktiver Limes einer Spektralfamilie von Funktoren der Gestalt $\sum_{i=1}^{n} H^{A_i}$.

VI. Die Kategorie W der Waelbroeck-Räume und die Räume n.t.$L(\mathcal{Y},F)$, n.t.$\mathcal{L}(F,\mathcal{Y})$

Mit Hilfe der Darstellung des Dualraumes eines Banachraumes nach Waelbroeck geben wir zunächst eine Realisierung der dualen Kategorie $\underline{B}^{op}$ von $\underline{B}$ als die konkrete Kategorie $\underline{W}$ der Waelbroeck-Räume an. Für Funktoren $\mathcal{Y}: \underline{C} \longrightarrow \underline{W}$ und $F: \underline{C} \longrightarrow \underline{B}$ definieren wir natürlichen Transformationen $\eta: \mathcal{Y} \longrightarrow F$, $\psi: F \longrightarrow \mathcal{Y}$, dann den Banachraum $\underset{\underline{C}}{\text{n.t.}}L(\mathcal{Y},F)$ und den Waelbroeckraum n.t.$\mathcal{L}(F,\mathcal{Y})$. Dann beweisen wir Sätze, die dem Yoneda Lemma verwandt sind.

(VI.1) Die Kategorie W der Waelbroeck-Räume:

Definition: Ein Waelbroeckraum ist ein Vektorraum $\mathcal{X}$ über dem Grundkörper I zusammen mit einer absolutkonvexen absorbierenden Teilmenge $O\mathcal{X}$ von $\mathcal{X}$, die mit einer kompakten Hausdorff-Topologie τ ausgestattet ist und für die folgendes gilt:

1) die Abbildung $x \longmapsto \frac{a+x}{2}$ von $O\mathcal{X}$ in $O\mathcal{X}$ ist stetig für alle $a \in O\mathcal{X}$.
2) der Ursprung in $O\mathcal{X}$ hat eine Umgebungsbasis von absolutkonvexen Mengen.

Wir nennen $O\mathcal{X}$ die kompakte Kugel von $\mathcal{X}$.

Lucien Waelbroeck hat folgenden Satz gezeigt:
Ein Waelbroeckraum $\mathcal{X}$ ist Dualraum eines Banachraumes $\mathcal{X}^*$; dabei ist $O\mathcal{X}$ die Einheitskugel und τ die Einschränkung der schwach*-Topologie auf $O\mathcal{X}$. Der Banachraum $\mathcal{X}^*$ ist bis auf isometrische Isomorphismen eindeutig bestimmt und ist der Raum aller Linearformen auf $\mathcal{X}$, deren Einschränkungen auf $O\mathcal{X}$ τ-stetig sind, aus-

gestattet mit der Norm der gleichmäßigen Konvergenz auf $O\mathcal{X}$.

Die "schwach*-Topologie" auf $\mathcal{X}$ kann man auf zweierlei Weise aus der Topologie τ auf $O\mathcal{X}$ gewinnen, ohne auf den Raum $\mathcal{X}^*$ zurückzugreifen:

Sie ist

1) die feinste lokalkonvexe Topologie auf $\mathcal{X}$, die die Inklusionsabbildung $(O\mathcal{X},\tau) \to \mathcal{X}$ stetig macht,
2) die feinste Topologie auf $\mathcal{X}$, die die Translationen und Homothetien $(x \to r\cdot x)$ in $\mathcal{X}$ und die Inklusion $(O\mathcal{X},\tau) \to \mathcal{X}$ stetig macht.

(vgl. Buchwalter).

<u>Definition:</u> Die Kategorie $\underline{W}$ hat als Objekte alle Waelbroeckräume und als Morphismen lineare Abbildungen, die in den schwach*-Topologien stetig sind.
Solche Abbildungen sind schon beschränkt, denn eine schwach* kompakte Menge ist schwach* beschränkt, also Norm-beschränkt.
Die Kategorie $\underline{W}_1$ hat als Morphismen schwach* stetige lineare Abbildungen, die kompakte Kugeln in solche abbilden.

Die Kategorie $\underline{W}_1$ und ihr Zusammenhang mit $\underline{B}_1$ wurde von Buchwalter untersucht.

$\underline{W}$ ist $\underline{B}^{op}$ und $\underline{W}_1$ ist $\underline{B}_1^{op}$. Die Funktoren der Dualität sind
$' : \underline{B} \to \underline{W}$ bzw $' : \underline{B}_1 \to \underline{W}_1$ und $^* : \underline{W} \to \underline{B}$ bzw. $^* : \underline{W}_1 \to \underline{B}_1$.
Sie wirken auf Morphismen durch Transposition und sind zueinander inverse kontravariante Funktoren.
In $\underline{B}$ ist der kontravariante Funktor $' : \underline{B} \to \underline{B}$ zu sich selbst adjungiert zur Rechten: $H(X,Y') = H(Y,X')$.

Darauf wende man den Dualitätsfunktor $'\colon \underline{B} \longrightarrow \underline{W}$ an: $\underline{W}(Y'',X')=H(Y,X')$. Dabei ist X' links Element von $\underline{W}$ und rechts Element von $\underline{B}$: wir schreiben also $b(X')$ für "X', als Banachraum aufgefaßt" und haben dann sofort $\underline{W}(Y'',X') = H(Y, b(X'))$, die Adjungiertheitsrelation für : $''\colon \underline{B} \longrightarrow \underline{W}$ ist linksadjungiert zu $b\colon \underline{W} \longrightarrow \underline{B}$.

Ein $\underline{W}$-Morphismus ist genau dann ein Monomorphismus, wenn er injektiv ist, und genau dann ein Epimorphismus, wenn sein Bild schwach*-dicht ist.

Produkte in $\underline{W}$ sind kartesische Produkte der Vektorräume, ausgestattet mit der Tychonov-Topologie der Faktoren. Die Coprodukte lassen keine einfache Beschreibung zu (vgl. Buchwalter).

Wir führen noch folgende Funktoren an:

$L : \underline{W} \times \underline{B} \longrightarrow \underline{B}$, $L(\mathfrak{X},Y)$ ist der Raum der schwach*-Norm-stetigen linearen Abbildungen $\mathfrak{X} \longrightarrow Y$, ausgestattet mit der Norm der gleichmäßigen Konvergenz auf $\bigcirc\mathfrak{X}$.

$\mathfrak{L} : \underline{B} \times \underline{W} \longrightarrow \underline{W}$, $\mathfrak{L}(X,\mathfrak{Y})$ ist der Raum aller beschränkten linearen Abbildungen $X \longrightarrow b\mathfrak{Y}$, ausgestattet mit der Topologie der punktweisen Konvergenz auf X. $\mathfrak{L}(X,\mathfrak{Y})$ ist also abgeschlossene Teilmenge von $\prod_{x \in X} \mathfrak{Y}$.

Die Transposition $(f \longmapsto f')$ liefert in beiden Fällen natürliche Äquivalenzen: $L(\mathfrak{X},Y) = L(Y',\mathfrak{X}^*)$ und $\mathfrak{L}(X,\mathfrak{Y}) = \mathfrak{L}(\mathfrak{Y}^*,X')$.

Das projektive Tensorprodukt $\mathfrak{X}\bar{\otimes}\mathfrak{Y}$ in $\underline{W}$ zweier Waelbroeck-Räume $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ ist definiert durch:

$\mathfrak{X}\bar{\otimes}\mathfrak{Y} = (B(\mathfrak{X},\mathfrak{Y}))'$, wobei $B(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ der Banachraum der schwach* x schwach*-stetigen Bilinearformen mit der Norm der gleichmäßigen

Konvergenz auf $O\mathfrak{X} \times O\mathfrak{Y}$ ist.

Der Symmetrie halber geben wir die duale Charakterisierung des projektiven Tensorproduktes $X\hat{\otimes}Y$ zweier Banachräume X und Y an:

$$X\hat{\otimes}Y = (\mathcal{B}(X,Y))^*, \text{ wobei } \mathcal{B}(X,Y)$$

der Waelbroeckraum der beschränkten Bilinearformen auf XxY ist, ausgestattet mit der Topologie der punktweisen Konvergenz auf XxY.

Alle Funktoren, die wir betrachten, seien wieder zulässig, das heißt zum Beispiel für $F:\underline{W} \longrightarrow \underline{B}$:

F ist linear auf den Morphismenräumen und $\|F(f)\| \leqslant \|b(f)\|$,

und für $\mathfrak{Y}:\underline{B} \longrightarrow \underline{W}$:

$\mathfrak{Y}$ ist linear und $\|b(\mathfrak{Y}(f))\| \leqslant \|f\|$.

Sei X ein Banachraum. Wir haben wie in der Einleitung das kommutative Diagramm natürlicher Transformationen über $\underline{W}$:

$$\begin{tikzcd}
X'\bar{\otimes}\ . \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\bar{w}"'] & \mathcal{L}(X,.) \\
\mathcal{L}^1(X,.) \arrow[r, "\tilde{\tau}"] & X'\bar{\bar{\otimes}}\ ., \arrow[u, "\rho"']
\end{tikzcd}$$

wobei $\tau(\sum x_i'\otimes y_i) = \sum \langle .,x_i'\rangle y_i$ für $\sum x_i'\otimes y_i \in X'\bar{\otimes}\mathfrak{Y}$ ist und $\mathcal{L}^1(X,\mathfrak{Y})$ der Quotientenraum (in $\underline{W}$) $X'\bar{\otimes}\mathfrak{Y}/\tau^{-1}(0)$, $X'\bar{\bar{\otimes}}\mathfrak{Y}$ der Abschluß von $\tau(X'\bar{\otimes}\mathfrak{Y})$ in $\mathcal{L}(X,\mathfrak{Y})$ in der induzierten Topologie.

Wieder sind äquivalent:

1) X genügt der Approximationsbedingung

2) $X'\bar{\otimes}\ . = \mathcal{L}^1(X,.)$

3) $X'\bar{\bar{\otimes}}\ . = \mathcal{L}(X,.)$. (vgl. Buchwalter).

(VI.2) Der Raum $n.t.L(\mathcal{G},F)$

Definition: Sei $\underline{C}$ eine beliebige Kategorie und $F : \underline{C} \longrightarrow \underline{B}$, $\mathcal{G} : \underline{C} \longrightarrow \underline{W}$ Funktoren, beide ko-oder beide kontravariant.
Eine Zuordnung φ, die für $C \in \underline{C}$ durch $C \mapsto \varphi_C \in L(\mathcal{G}(C), F(C))$ definiert ist, heißt natürliche Transformation von $\mathcal{G}$ in F, wenn gilt:

1) Für jeden Morphismus $f : C \longrightarrow C_1$ in $\underline{C}$ ist $F(f) \circ \varphi_C = \varphi_{C_1} \mathcal{G}(f)$ in $L(\mathcal{G}(C), F(C_1))$ im kovarianten Fall, oder $\varphi_C \cdot \mathcal{G}(f) = F(f) \cdot \varphi_{C_1}$ in $L(\mathcal{G}(C_1), F(C))$ im kontravarianten Fall.
2) $\|\varphi\| := \sup\{\|\varphi_C\|, C \in \underline{C}\} < \infty$

Für jedes $C \in \underline{C}$ ist also $\varphi_C : \mathcal{G}(C) \longrightarrow F(C)$ schwach* - Norm-stetig.

Satz1: Wenn die Klasse aller natürlichen Transformationen $\mathcal{G} \longrightarrow F$ eine Menge ist, dann ist sie ein Banachraum mit der oben angegebenen Norm, der mit $n.t.L(\mathcal{G},F)$ bezeichnet werden soll.

Beweis: Die lineare Struktur auf $\underset{C}{n.t.}L(\mathcal{G},F)$ ist objektweise definiert: $(\varphi_C)_{C \in \underline{C}} + (\eta_C)_{C \in \underline{C}} = (\varphi_C + \eta_C)_{C \in \underline{C}}$. Man prüft leicht nach, daß $(\varphi_C + \eta_C)_{C \in \underline{C}}$ wieder eine natürliche Transformation ist und daß $(n.t.L(\mathcal{G},F), \|\cdot\|)$ ein normierter Raum ist. Die Vollständigkeit zeigt man, indem man zu einer Couchyfolge den Limes objektweise konstruiert.

Satz 2: Sei $F : \underline{W} \longrightarrow \underline{B}$ ein kovarianter zulässiger Funktor und $X \in \underline{B}$. Dann ist $\underset{\underline{W}}{n.t.}H(b\mathcal{L}_X, F)$ isometrisch isomorph zu $F(X'')$ und zwar natürlich in X.

Bemerkung: $b\mathcal{L}_X : \underline{W} \longrightarrow \underline{B}$

$$b\mathcal{L}_X(\mathcal{Y}) = b\mathcal{L}(X,\mathcal{Y}) = H(X, b(\mathcal{Y})).$$

Man könnte jetzt vermuten, daß man das Yoneda Lemma anwenden könnte, wenn man $\underline{W}$ mittels b in $\underline{B}$ einbettet. Das ist deswegen nicht der Fall, weil $b(\underline{W})$ keine volle Teilkategorie von $\underline{B}$ ist (es gibt $f : X' \longrightarrow Y'$, die nicht schwach*-stetig in X' und Y' sind), und das Yoneda Lemma *nur* auf vollen Teilkategorien von $\underline{B}$ gilt.

<u>Beweis des Satzes:</u>

Sei $\varphi \in \text{n.t.H}(b\mathcal{L}_X^{\varphi},F)$. Wir wollen die Beweisidee des Yoneda-Lemmas imitieren und benötigen dazu ein möglichst kanonisches Element in einem Raum $b\mathcal{L}(X,\mathcal{Y})$, $\mathcal{Y} \in \underline{W}$. Wir *wählen* $\mathcal{Y} = X''$ und die Einbettung $i_X : X \longrightarrow X''$. $i_X \in b\mathcal{L}(X,X'')$, daher ist $\varphi_{X''}(i_X)$ definiert und Element in $F(X'')$. Wir definieren also die Abbildung

$T_X : \text{n.t.H}_{\underline{W}}(b\mathcal{L}_X,F) \longrightarrow F(X'')$

durch $T_X(\varphi) = \varphi_{X''}(i_X)$.

Dann ist T_X klarerweise linear, und beschränkt, weil $\|T_X(\varphi)\| = \|\varphi_{X''}(i_X)\| \leq \|\varphi_{X''}\| \; \|i_X\| \leq \|\varphi\|$ gilt, also ist $\|T_X\| \leq 1$.

Wir konstruieren nun eine lineare Kontraktion $U_X : F(X'') \longrightarrow$
$\longrightarrow \text{n.t.H}_{\underline{W}}(b\ _X,F)$, die zu T_X invers sein soll.

Sei $x \in F(X'')$ und $f \in b\mathcal{L}(X,\mathcal{Y})$, $\mathcal{Y} \in \underline{W}$. Dann ist $f \in H(X,b\mathcal{Y})$ und wir schreiben $\bar{f}$ für das Bild von f in $\underline{W}(X'',\mathcal{Y})$ unter der Adjunktion $H(X,b\mathcal{Y}) = \underline{W}(X'',\mathcal{Y})$ (vgl. (VI.1)). Man gewinnt $\bar{f}$ aus f, indem man $f'|\mathcal{Y}^* : \mathcal{Y}^* \longrightarrow X'$ und $\bar{f} = (f'|\mathcal{Y}^*)'$ bildet und f aus $\bar{f}$ durch $f = \bar{f}|_X$. Man überzeugt sich leicht davon, daß $\|f\| = \|\bar{f}\|$ gilt und $\bar{f}$ die eindeutige schwach*-stetige Fortsetzung von $f : X \longrightarrow \mathcal{Y}$ auf $X'' \longrightarrow \mathcal{Y}$ ist.

Wir betrachten das Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
i_X \in b\mathcal{L}(X,X'') \arrow[r, dashed] \arrow[d, "b\mathcal{L}(X,\bar f)"'] & F(X'') \ni x \arrow[d, "F(\bar f)"] \\
f \in b\mathcal{L}(X,\mathcal{Y}) \arrow[r, dashed] & F(\mathcal{Y})
\end{tikzcd},$$

das folgende Definition motiviert:

$U_X : F(X'') \longrightarrow \underset{\underline{W}}{\mathrm{n.t.}}H(b\mathcal{L}_X, F)$ sei durch $U_X(x)_{\mathcal{Y}}(f) = F(\bar f)(x)$

für $x \in F(X'')$, $\mathcal{Y} \in \underline{W}$ und $f \in b\mathcal{L}(X,\mathcal{Y})$ definiert.

Wir zeigen, daß $\mathcal{Y} \longmapsto U_X(x)_{\mathcal{Y}}$ natürlich ist: Sei $g : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Z}$ ein $\underline{W}$-Morphismus. Wir müssen folgendes Diagramm auf Kommutativität untersuchen:

$$\begin{tikzcd}
b\mathcal{L}(X,\mathcal{Y}) \arrow[r, "U_X(x)_{\mathcal{Y}}"] \arrow[d, "b\mathcal{L}(X,g)"'] & F(\mathcal{Y}) \arrow[d, "F(g)"] \\
b\mathcal{L}(X,\mathcal{Z}) \arrow[r, "U_X(x)_{\mathcal{Z}}"] & F(\mathcal{Z})
\end{tikzcd}$$

Sei $f \in b\mathcal{L}(X,\mathcal{Y})$. Dann ist $F(\bar g) \circ U_X(x)_{\mathcal{Y}}(f) = F(g) \circ F(\bar f)\ (x)$

$$U_X(x)_{\mathcal{Z}} \circ b\mathcal{L}(X,g)f = U_X(x)_{\mathcal{Z}}(g \circ f)$$

$$F(\overline{g \circ f})\ (x).$$

Also bleibt zu zeigen; $\overline{g \circ f} = g \circ \bar f$, doch das folgt aus der Natürlichkeit der Adjungiertheitsrelation $H(X, b\mathcal{Y}) = \underline{W}(X'',\mathcal{Y})$ in $\mathcal{Y}$:

$$\overline{g \cdot f} = \overline{b(g) \circ f} = \overline{H(X,b(g))(f)} =$$

$$= \underline{W}(X'',g)\ (\bar f) = g \circ \bar f.$$

Wir geben noch einem zweiten Beweis dieser Tatsache, da sich hier der Zusammenhang zwischen der kategorientheoretischen Aussage

"Natürlichkeit in $\mathcal{Y}$ " und dem funktionalanalytischen Hintergrund schön offenbart:

$g \circ \bar{f} : X'' \longrightarrow \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Z}$ ist eine stetige Erweiterung von $g\circ f$. Die ist aber eindeutig und heißt $\overline{g\circ f}$, also ist $g\circ \bar{f} = \overline{g\circ f}$.

$\|U_X\| \leqslant 1$, denn

$$\|U_X(x)_{\mathcal{Y}}(f)\| = \|F(\bar{f})(x)\|$$
$$\leqslant \|b(\bar{f})\| \, \|x\| = \|f\| \, \|x\|.$$

Wir zeigen $U_X \circ T_X = \mathrm{Id}$ auf $\underset{\underline{W}}{\mathrm{n.t.}}(b\mathcal{L}_X, F)$: Sei $\varphi \in \underset{\underline{W}}{\mathrm{n.t.}}(b\mathcal{L}_X, F)$ und $f \in b\mathcal{L}(X, \mathcal{Y})$, $\mathcal{Y} \in \underline{W}$.

Dann ist:

$$[U_X \circ T_X(\varphi)]_{\mathcal{Y}}(f) = [U_X(\varphi_{X''}(i_X))]_{\mathcal{Y}}(f)$$
$$= F(\bar{f}) \circ \varphi_{X''}(i_X)$$
$$= \varphi_{\mathcal{Y}} \circ b\mathcal{L}(X, \bar{f})(i_X)$$
$$= \varphi_{\mathcal{Y}}(\bar{f} \circ i_X)$$
$$= \varphi_{\mathcal{Y}}(f),$$

denn $\bar{f} \circ i_X = f$, weil $\bar{f}$ Erweiterung von f ist. (oder weil i_X Koeinheit der Adjunktion ist). Wir zeigen, daß $T_X \circ U_X = 1_{F(X'')}$ ist. Sei $x \in F(X'')$, dann ist:

$$T_X \circ U_X(x) = [U_X(x)]_{X''}(i_X)$$
$$= F(\bar{i}_X)(x)$$
$$= F(1_{X''})(x) = x$$

denn $\bar{i}_X = 1_{X''}$, weil i_X Koeinheit der Adjunktion ist (oder weil $1_{X''}$ Erweiterung von i_X ist).

Also hat T_X eine Inverse Abbildung U_X, die auch eine Kontraktion ist, daher ist T_X ein isometrischer Isomorphismus. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß $X \longmapsto T_X$ natürlich ist, also

$T : \underset{\underline{W}}{\overset{(..)}{\text{n.t.H}}}(b\mathcal{L}(.,..),\ F(..)) \longrightarrow F\circ''$ eine natürliche Transformation.

Sei $g : X \longrightarrow Y$ ein $\underline{B}$-Morphismus. Wir müssen das folgende Diagramm untersuchen:

$$\begin{tikzcd}
\text{n.t.H}(b\mathcal{L}_X,F) \arrow[r, "T_X"] \arrow[d, "\text{n.t.H}(b\mathcal{L}(g,.),F)"'] & F(X'') \arrow[d, "F(g'')"] \\
\text{n.t.H}(b\mathcal{L}_Y,F) \arrow[r, "T_Y"] & F(Y'')
\end{tikzcd} .$$

Sei $\varphi \in \text{n.t.H}(b\mathcal{L}_X,F)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
&T_Y \circ \text{n.t.H}(b\mathcal{L}(g,.),F) \quad (\varphi) = \\
&= T_Y \ (\varphi \circ b\mathcal{L}(g,.)) \\
&= \varphi_{Y''} \circ b\mathcal{L}(g,Y'') \ (i_Y) \\
&= \varphi_{Y''} \ (i_Y \circ g)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(g''). \quad &T_X(\varphi) \quad = \\
&= F(g'')\circ\varphi_{X''} \ (i_X) \\
&= \varphi_{Y''} \circ b\mathcal{L}(X,g'') \ (i_X) \\
&= \varphi_{Y''} \ (g''\circ i_X)
\end{aligned}$$

und $g''\circ i_X = i_Y\circ g$, weil $i : \text{Id} \longrightarrow ''$ eine natürliche Transformation ist. qed.

<u>Bemerkung:</u> Sei $F : \underline{W} \longrightarrow \underline{B}$ ein zulässiger kovarianter Funktor.

Dann ist $\underset{\underline{W}}{\text{n.t.}}L(\mathcal{L}_X,F)$ isometrisch isomorph zu einem abgeschlossenen Teilraum von $F(X'')$, und zwar natürlich in X – das heißt, $\underset{\underline{W}}{\text{n.t.}}L(\mathcal{L},F)$ ist ein Teilfunktor von F''.
Dieser Teilraum $T_X(\underset{\underline{W}}{\text{n.t.}}L(\mathcal{L}_X,F))$ besteht genau aus denjenigen $x \in F(X'')$ für die die Abbildung $U_X(x)_{\mathcal{Y}} \in L(\mathcal{L}(X,\mathcal{Y}),\ F(\mathcal{Y}))$ ist für jedes $\mathcal{Y} \in \underline{W}$. Dabei ist $U_X(x)_{\mathcal{Y}} : \mathcal{L}(X,\mathcal{Y}) \longrightarrow F(\mathcal{Y})$ die Abbildung $f \longmapsto F(\tilde{f})(x)$ aus dem Beweis von Satz 2.

<u>Satz 3:</u> $\underset{\underline{W}}{\text{n.t.}}L(\mathcal{L}_X,\ b\mathcal{L}_Y) = (0)$ für alle $X,Y \in \underline{B}$.

<u>Beweis:</u> Nach der Bemerkung besteht $T_X(\underset{\underline{W}}{\text{n.t.}}L(\mathcal{L}_X,\ b\mathcal{L}_Y))$ aus denjenigen $f \in b\mathcal{L}(Y,X'')$, für die $U_X(f)_{\mathcal{Y}} \in L(\mathcal{L}(X,\mathcal{Y}),\ b\mathcal{L}(Y,\mathcal{Y}))$ ist für alle $\mathcal{Y} \in \underline{W}$.
Angenommen, es gilt so ein $f \neq 0$. Es sei $\mathcal{Y}$ mit $\dim \mathcal{Y}^* = \infty$ fest gewählt. Dann ist $U_X(f)_{\mathcal{Y}} : \mathcal{L}(X,\mathcal{Y}) \longrightarrow b\mathcal{L}(Y,\mathcal{Y})$ stetig, also gibt es eine Nullumgebung V in $\mathcal{L}(X,\mathcal{Y})$ mit $U_X(f)_{\mathcal{Y}}(V) \subseteq \bigcirc b\mathcal{L}(Y,\mathcal{Y}) = \bigcirc H(Y,b\mathcal{Y})$.
Also existiert eine endliche Menge $A \subseteq X$ und eine endliche Menge $C \subseteq \mathcal{Y}^*$, sodaß für $W = \{ g \in \mathcal{L}(X,\mathcal{Y}),\ g(A) \subseteq C^\circ \}$ $U_X(f)_{\mathcal{Y}}(W) \subseteq \bigcirc H(Y,b\mathcal{Y})$ gilt, wobei $C^\circ = \{ x \in \mathcal{Y},\ |\langle x,c \rangle| \leq 1 \text{ für alle } c \in C \subseteq \mathcal{Y}^* \}$ die absolute Polare von C ist, denn Mengen der Gestalt W bilden eine Nullumgebungsbasis in $\mathcal{L}(X,\mathcal{Y})$.
Weil $f \neq 0$ ist, existieren $y \in Y$ und $x' \in X'$ mit $\langle x',\ f(y) \rangle \neq 0$. Weil $\dim \mathcal{Y}^* = \infty$ ist, $\exists\ z \in \mathcal{Y}^*$, das nicht in der linearen Hülle von C (die abgeschlossen ist, weil C endlich ist) liegt.
Wir wählen ein beschränktes $g : \mathcal{Y}^* \longrightarrow X'$ mit $g(z) = x'$ und $\ker g \supseteq C$; so etwas existiert nach dem Satz von Hahn-Banach: man dehne das durch $v(z) = 1$, $v(c) = 0$ für $c \in C$ auf dem Erzeugnis von

$C \cup \{z\}$ wohldefinierte (weil $z \notin$ linearen Hülle von C) lineare Funktional auf ganz $\mathcal{Y}^*$ aus und bilde $g = v(.) .x'$.

Dann ist $g \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^*, X')$, also $h = g'|_X \in \mathcal{L}(X, \mathcal{Y})$ und

$\langle r\,h(a),\ c\rangle = \langle a,\ r\cdot g(c)\rangle = \langle a,\ 0\rangle = 0$ für alle $a \in A$, $c \in C$ und $r \in I$,

also ist $r\cdot h \in W$ für alle $r \in I$.

Daher ist $\| U_X\ (f)_{\mathcal{Y}}\ (rh)\|$

$$= \|b\mathcal{L}(Y,\ \overline{rh})\ (f)\| = |r|\ \|\bar{h} \circ f\| \leqslant 1$$

für alle $r \in I$, also $h \circ f = 0$. Aber $\langle z,\ h \circ f(y)\rangle = \langle z, g' \circ f(y)\rangle$

$$= \langle g(z), f(y)\rangle = \langle x', f(y)\rangle \neq 0$$

und das ist ein Widerspruch. qed.

Der kontravariante Fall ist leichter zu behandeln:

Sei $F : \underline{B} \longrightarrow \underline{B}$ ein kontravarianter Funktor. Dann ist für $\mathcal{X} \in \underline{W}$

$\underset{\underline{B}}{\text{n.t.H}}(b\mathcal{L}^{\mathcal{X}}, F) = \underset{\underline{B}}{\text{n.t.H}}(H^{b(\mathcal{X})}, F) = F(b\mathcal{X})$ natürlich in $\mathcal{X}$ nach dem Yoneda-Lemma für $\underline{B}$, wobei $b\mathcal{L}^{\mathcal{X}}(Y) = b\mathcal{L}(Y,\mathcal{X}) = H(Y,\ b\mathcal{X})$ ist.

Man kann wieder $\underset{\underline{B}}{\text{n.t.L}}(\mathcal{L}^{\mathcal{X}}, F)$ in $\underset{\underline{B}}{\text{n.t.H}}(b\mathcal{L}^{\mathcal{X}}, F)$ einbetten; also ist $\underset{\underline{B}}{\text{n.t.L}}(\mathcal{L}^{\mathcal{X}}, F)$ isometrisch isomorph einem abgeschlossenen Teilraum von $F(b\mathcal{X})$, natürlich in $\mathcal{X}$. Also ist $\underset{\underline{B}}{\text{n.t.L}}(\mathcal{L}, F)$ ein Teilfunktor von $F \circ b$. Aus dem Beweis des Yoneda-Lemmas folgt sofort die Gestalt dieses Teilraumes:

$\underset{\underline{B}}{\text{n.t.L}}(\mathcal{L}^{\mathcal{X}}, F)$ ist isometrisch isomorph zum Teilraum derjenigen $x \in F(b\mathcal{X})$, für die die Abbildung $: \mathcal{L}(X,\mathcal{X}) \longrightarrow F(X)$, die durch $f \longmapsto F(f)x$ gegeben ist, ein Element von $L(\mathcal{L}(X,\mathcal{X}), F(X))$ ist für jedes $X \in \underline{B}$.

<u>Satz 4:</u> $\underset{\underline{B}}{\text{n.t.}}L(\mathcal{L}^{\mathcal{X}}, H^Y) = (0)$ für alle $\mathcal{X} \in \underline{W}$ und $Y \in \underline{B}$.

<u>Beweis:</u> $\text{n.t.}L(\mathcal{L}^{\mathcal{X}}, H^Y)$ entspricht dem Teilraum von $H(b\mathcal{X}, Y)$, der aus den $f: b\mathcal{X} \longrightarrow Y$ besteht, für die die Abbildung $g \longmapsto H^Y(g)(f) = f \circ g$ ein Element von $L(\mathcal{L}(X,\mathcal{X}), H(X,Y))$ ist für alle $X \in \underline{B}$. Sei $X \in \underline{B}$ mit $\dim X = \infty$ festgehalten.

Angenommen, es gibt so ein $f \neq 0$, $f \in H(b\mathcal{X}, Y)$.

Dann existiert eine Nullumgebung V in $\mathcal{L}(X,\mathcal{X})$ mit $f \circ V \subseteq OH(X,Y)$. Also gibt es eine endliche Menge $A \subseteq X$ und eine endliche Menge $C \subseteq \mathcal{X}^*$, sodaß für $W = \{ g \in \mathcal{L}(X,\mathcal{X}),\ \langle c, g(a) \rangle \leqslant 1$ für alle $a \in A$ und $c \in C \}$ gilt: $f \circ W \subseteq OH(X,Y)$, denn die Mengen der Form W bilden eine Nullumgebungsbasis von $\mathcal{L}(X,\mathcal{X})$.

Da $f \neq 0$ ist, existiert ein $z \in b\mathcal{X}$, sodaß $f(z) \neq 0$ in X ist. Weil $\dim X = \infty$ ist, gibt es ein $x \in X$, das nicht Linearkombination der endlichen Menge $A \subseteq X$ ist. Man wähle ein beschränktes $g: X \longrightarrow b\mathcal{X}$ mit $g(x) = z$ und $\ker g \supseteq A$. Die Existenz von g folgt durch ein Argument ähnlich dem, das wir im Beweis von Satz 3 verwendet haben.

Nun gilt für alle $a \in A$, $c \in C$ und $r \in I$:

$$\langle c, rg(a) \rangle = \langle c, 0 \rangle = 0, \text{ also ist } r.g \in W \text{ für alle } r \in I;$$

Daher ist $\| f \circ rg \| = |r| \, \| f \circ g \| \leqslant 1$ für alle $r \in I$, das heißt $f \circ g = 0$. Aber $f \circ g(x) = f(z) \neq 0$, das ist ein Widerspruch. qed.

(VI.3) Der Raum $n.t.\mathcal{L}(F,\mathcal{G})$.

Definition: Es seien $F:\underline{C} \longrightarrow \underline{B}$ und $\mathcal{G}:\underline{C} \longrightarrow \underline{W}$ Funktoren, bei ko- oder beide kontravariant und $\underline{C}$ sei dabei eine beliebige Kategorie. Eine (zulässige) natürliche Transformation $\eta : F \longrightarrow b\circ\mathcal{G}$ heißt auch eine natürliche Transformation $\eta : F \to \mathcal{G}$; dabei wird η als Abbildung $C \longmapsto \eta_C \in \mathcal{L}(F(C),\mathcal{G}(C))$ aufgefaßt.

Der Raum aller natürlichen Transformationen $F \to \mathcal{G}$ trägt in natürlicher Weise eine Waelbroeckraumstruktur, ist also Objekt von $\underline{W}$, wenn er Menge ist: Seien F und $\mathcal{G}$ zum Beispiel kovariant; dann ist $G = {*}\circ\mathcal{G} : \underline{C} \longrightarrow \underline{B}$ kontravariant, $\mathcal{G} = {'}\circ G$ und nach Satz 3 von Cigler gilt:

$$n.t.H_{\underline{C}}(F,b\mathcal{G}) = n.t.H_{C}(F,{'}\circ G) =$$

$$= n.t.H_{\underline{C}}(F,H(G,I)) = n.t.H_{\underline{C}}(G\hat{\otimes}F,I)$$

$$= (G\hat{\otimes}F)';$$

Wir können daher $n.t.H_{\underline{C}}(F,b\mathcal{G})$ als Dualraum von $G\hat{\otimes}F$ auffassen. Versieht man ihn mit der entsprechenden schwach*-Topologie, so erhält man einen Waelbroeck-Raum, der mit $n.t.\mathcal{L}_{\underline{C}}(F,\mathcal{G})$ bezeichnet werden soll.

Satz 1: Es sei $\underline{C}$ eine beliebige Kategorie, $F:\underline{C} \longrightarrow \underline{B}$ und $\mathcal{G}:\underline{C} \longrightarrow \underline{W}$ kovariante Funktoren. Dann ist der Waelbroeck-Raum $n.t.\mathcal{L}_{\underline{C}}(F,\mathcal{G})$ als projetiver Limes in $\underline{W}_1$ darstellbar.

<u>Beweis:</u> Wir verwenden die Darstellung von $(*\circ\mathcal{Y})\hat{\otimes}F$ als induktiver Limes in $\underline{B}_1$, die in (V.1) angegeben wurde. Da der Funktor $':\underline{B}_1 \longrightarrow \underline{W}_1$ invertierbar ist, führt er induktive Limiten in projektive über und die Spektralfamilie in (V.1) wird zu folgender in $\underline{W}_1$:

Indexklasse ist die Klasse aller Morphismen in $\underline{C}$.

Jedem $\lambda : C \longrightarrow C_1$ in $\underline{C}$ entspricht der Waelbroeck-Raum $\mathcal{R}^\lambda = \mathcal{L}(F(C), \mathcal{Y}(C_1))$

Jedes Paar (α,β) von Morphismen in $\underline{C}$, für das das Diagramm

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\lambda"] & C_1 \arrow[d, "\beta"] \\ D \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "\mu"] & D_1 \end{tikzcd}$$

kommutiert,

definiert eine Abbildung $\pi^\mu_\lambda \in \Pi^\mu_\lambda : \mathcal{R}^\lambda \longrightarrow \mathcal{R}^\mu$, wobei

$\pi^\mu_\lambda = \mathcal{L}(F(\alpha), \mathcal{Y}(\beta)) : \mathcal{L}(F(C), \mathcal{Y}(C_1)) \longrightarrow \mathcal{L}(F(D), \mathcal{Y}(D_1))$ ist.

Der Morphismus $\pi_\lambda : \underset{\underline{C}}{\mathrm{n.t.}}\mathcal{L}(F,\mathcal{Y}) \longrightarrow \mathcal{R}^\lambda$ ist gegeben durch

$$\pi_\lambda(\eta) = \mathcal{Y}(\lambda)\,\eta_C = \eta_{C_1} \circ F(\lambda) \in \mathcal{L}(F(C), \mathcal{Y}(C_1))$$

für $\eta \in \underset{\underline{C}}{\mathrm{n.t.}}\mathcal{L}(F,\mathcal{Y})$. qed.

<u>Satz 2:</u> Sei $\mathcal{Y} : \underline{W} \longrightarrow \underline{W}$ ein kovarianter Funktor und $X \in \underline{B}$. Dann ist $\underset{\underline{W}}{\mathrm{n.t.}}\mathcal{L}(b\mathcal{L}_X, \mathcal{Y}) = \mathcal{Y}(X'')$ natürlich in X.

<u>Beweis:</u> Die Gleichheit bedeutet eigentlich Isomorphie in $\underline{W}_1$: es gibt eine umkehrbare lineare Abbildung, die einen Homöomorphismus zwischen den kompakten Kugeln vermittelt, also einen Isomorphismus im isometrischen Sinn und im Sinn der schwach*- Topologie.

$b\mathcal{L}(X,\mathcal{Y}) = H(X, b\mathcal{Y})$. Also stimmt der Funktor $b\mathcal{L}_X$ mit dem auf die nicht volle Teilkategorie $b(\underline{W})$ von $\underline{B}$ eingeschränkten Funktor H_X überein.

Wir verwenden genau dieselben Abbildungen wie im Beweis von (VI.2), Satz 2, denn $b\ \underset{\underline{W}}{n.t.}\mathcal{L}(b\mathcal{L}_X,\mathcal{Y}) = \underset{\underline{W}}{n.t.}H(b\mathcal{L}_X, b\mathcal{Y})$.

Also ist

$T_X : \underset{\underline{W}}{n.t.}\mathcal{L}(b\mathcal{L}_X,\mathcal{Y}) \longrightarrow \mathcal{Y}(X'')$ durch $T_X(\eta) = \eta_{X''}(i_X)$ für $\eta \in \underset{\underline{W}}{n.t.}\mathcal{L}(b\mathcal{L}_X,\mathcal{Y})$ definiert, wobei $i_X : X \longrightarrow X''$ die kanonische Einbettung ist;

$U_X : \mathcal{Y}(X'') \longrightarrow \underset{\underline{W}}{n.t.}\mathcal{L}(b\mathcal{L}_X,\mathcal{Y})$ ist durch $U_X(x)_{\mathcal{Y}}(f) = \mathcal{Y}(\bar{f})(x)$ für $x \in \mathcal{Y}(X'')$ und $f \in b\mathcal{L}(X,\mathcal{Y})$, $\mathcal{Y} \in \underline{W}$ definiert, wobei $\bar{f}$ das dem f eindeutig unter der Adjungiertheitsrelation

$b\mathcal{L}(X,\mathcal{Y}) = H(X,b\mathcal{Y}) = \underline{W}(X'',\mathcal{Y})$ entsprechende Element ist.

In (VI.2) Satz 2 haben wir schon gezeigt, daß $T_X^{-1} = U_X$, T_X eine Isometrie und $X \longmapsto T_X$ natürlich ist. Es bleibt also noch zu zeigen, daß T_X und U_X schwach*-stetig sind.

Sei $\varphi^{(\nu)}$ ein Netz in $\bigcirc\ \underset{\underline{W}}{n.t.}\mathcal{L}(b\mathcal{L}_X,\mathcal{Y})$, das in der schwach*-Topologie gegen Null konvergiert. Da die Topologie von $\underset{\underline{W}}{n.t.}\mathcal{L}(b\mathcal{L}_X,\mathcal{Y})$ die projektive Limes-Topologie bezüglich der Abbildungen

$\pi_\lambda : \underset{\underline{W}}{n.t.}\mathcal{L}(b\mathcal{L}_X,\mathcal{Y}) \longrightarrow \mathbb{R}^\lambda$ aus Satz 1 ist, ist speziell die Abbildung $\pi_{1_{X''}}$ stetig.

Also gilt: $\pi_{1_{X''}}(\varphi^{(\nu)}) = \varphi^{(\nu)}_{X''} \longrightarrow 0$ in $\mathcal{L}(b\mathcal{L}(X,X''),\mathcal{Y}(X''))$ und das besagt, daß für jedes $f \in b\mathcal{L}(X,X'')$ das Netz $\varphi^{(\nu)}_{X''}(f) \longrightarrow 0$ in $\mathcal{Y}(X'')$ konvergiert.

Speziell ist also:

$\varphi^{(\nu)}_{X''}(i_X) = T_X(\varphi^{(\nu)}) \longrightarrow 0$ in $\mathcal{Y}(X'')$.

T_X induziert also eine stetige bijektive Abbildung zwischen den kompakten Kugeln $\bigcirc\,\text{n.t.}\mathcal{L}(b\mathcal{Y}_X,\mathcal{Y})$ und $\bigcirc\,\mathcal{Y}(X'')$, also einen Homöomorphismus qed.

<u>Satz 3:</u> Sei $\mathcal{Y}:\underline{W}\longrightarrow\underline{W}$ ein kovarianter Funktor. Dann ist $\text{n.t.}\mathcal{L}(H^{Y}{}_{\circ}{}^{*},\mathcal{Y}) = \mathcal{Y}(Y')$ natürlich in Y.

<u>Beweis:</u> Wir benützen die Abbildungen aus dem Beweis des Yoneda-Lemmas:

$T_Y : \underset{\underline{W}}{\text{n.t.}}\mathcal{L}(H_{Y}{}^{\circ *},\mathcal{Y})\longrightarrow\mathcal{Y}(Y')$, definiert durch $T_Y(\varphi)=\varphi_{Y'}(1_Y)\in\mathcal{Y}(Y')$ für $\varphi\in\underset{\underline{W}}{\text{n.t.}}\mathcal{L}(H^{Y}{}_{\circ}{}^{*},\mathcal{Y})$ und $U_Y : \mathcal{Y}(Y')\longrightarrow\underset{\underline{W}}{\text{n.t.}}\mathcal{L}(H^{Y}{}_{\circ}{}^{*},\mathcal{Y})$, definiert durch $U_Y(y)_{\mathcal{M}}(f) = \mathcal{Y}(f')(x)$ für $\mathcal{M}\in\underline{W}$, $y\in\mathcal{Y}(Y')$, $f\in H(\mathcal{M}^{*},Y)$.
Genauso wie beim Yoneda-Lemma beweist man $\|T_Y\|_b\leq 1$, $\|U_Y\|_b\leq 1$, $T_Y^{-1}=U_Y$ und $Y\longmapsto T_Y$ ist natürlich. Also vermittelt T_Y ein Bijektion zwischen den kompakten Kugeln, die ein Homöpmorphismus ist, wenn wir zeigen können, daß T_Y stetig ist:
Sei $\varphi^{(\nu)}\longrightarrow 0$ in $\underset{\underline{W}}{\text{n.t.}}\mathcal{L}(H_{Y}{}^{\circ *},\mathcal{Y})$; also ist $\pi_{1_{Y'}}(\varphi^{(\nu)})=\varphi^{(\nu)}_{Y'}\longrightarrow 0$ (Satz 1) in $\mathcal{L}(H((Y')^{*},Y),\mathcal{Y}(Y')) = \mathcal{L}(H(Y,Y),\mathcal{Y}(Y'))$, also $\varphi^{(\nu)}_{Y'}(1_Y) = T_Y(\varphi^{(\nu)})\longrightarrow 0$ in $\bigcirc\,\mathcal{Y}(Y')$. qed.

<u>Satz 4:</u> Sei $\mathcal{H}:\underline{B}\longrightarrow\underline{W}$ ein kontravarianter Funktor. Dann ist $\underset{\underline{B}}{\text{n.t.}}\mathcal{L}(b\mathcal{L}^{\mathfrak{X}},\mathcal{H}) = \mathcal{H}(b\mathfrak{X})$ natürlich in $\mathfrak{X}\in\underline{W}$.

<u>Beweis:</u> Wiederum verwenden wir die Abbildungen des Yoneda-Lemmas:
$T_{\mathfrak{X}}$: $\underset{\underline{B}}{\text{n.t.}}\mathcal{L}(b\mathcal{L}^{\mathfrak{X}},\mathcal{H})\longrightarrow\mathcal{H}(b\mathfrak{X})$, definiert durch $T_{\mathfrak{X}}(\varphi) = \varphi_{b\mathfrak{X}}(1_{\mathfrak{X}})$ für $\varphi\in\underset{\underline{B}}{\text{n.t.}}\mathcal{L}(b\mathcal{L}^{\mathfrak{X}},\mathcal{H})$ und $U_{\mathfrak{X}}$: $\mathcal{H}(b\mathfrak{X})\longrightarrow\underset{\underline{B}}{\text{n.t.}}\mathcal{L}(b\mathcal{L}^{\mathfrak{X}},\mathcal{H})$, definiert durch $U_{\mathfrak{X}}(x)_Y(f) = \mathcal{H}(f)(x)$ für $Y\in\underline{B}$, $x\in\mathcal{H}(b\mathfrak{X})$ und $f\in b\mathcal{L}(Y,\mathfrak{X})$. Dann gilt:

$\|T_{\mathfrak{X}}\|_b \leqslant 1$, $\|U_{\mathfrak{X}}\|_b \leqslant 1$, $T_{\mathfrak{X}}^{-1} = U_{\mathfrak{X}}$ und $\mathfrak{X} \mapsto T_{\mathfrak{X}}$ ist natürlich.
$T_{\mathfrak{X}}$ ist stetig nach einem Argument analog dem im Beweis von Satz 3, vermittelt also einen Homöpmorphismus zwischen den kompakten Kugeln. qed.

VII. Δ-Dualität von Funktoren.

Die Ergebnisse von (VI.3) geben Anlaß zur Definition eines Dualitätsfunktors auf $\mathrm{Funkt}_{\mathrm{kontra}}\ (\underline{K},\underline{B})$ bzw. $\mathrm{Funkt}_{\mathrm{ko}}\ (\underline{V},\underline{B})$, wobei $\underline{V}$ eine volle Teilkategorie von $\underline{W}$ ist, der zu sich selbst adjungiert zur Rechten ist. (Dieser und der Dualitätsfunktor aus IV sind die einzigen unter allen möglichen Dualitätsfunktoren, die zu sich selbst adjungiert zur Rechten sind - das ist der Grund, warum wir hier den Funktor Δ genauer untersuchen). Dieser Funktor Δ ist etwas sensibler als der Funktor D.
In (VII.1) definieren wir Δ und leiten die Adjungiertheitsrelation her, in (VII.2) berechnen wir den Wert von Δ für einige konkrete Funktoren. Nicht erklärte Bezeichnungen stammen zum Großteil aus VI.

(VII.1) Der Funktor Δ auf Funkt $(\underline{V},\underline{B})$.

$\underline{V}$ sei eine volle Teilkategorie von $\underline{B}$. Wir definieren für $F : \underline{V} \to \underline{B}$ den Δ-dualen Funktor ΔF so, daß er je nach Belieben als Funktor $\underline{V} \to \underline{B}$ oder $\underline{W} \to \underline{B}$ aufgefaßt werden kann.

<u>Definition:</u> Sei $F : \underline{V} \to \underline{B}$ ein kovarianter Funktor, zulässig im Sinn der Definition auf Seite 99.

Sei $\mathfrak{X} \in \underline{V}$ (oder $\in \underline{W}$). Dann sei
$$\Delta F(\mathfrak{X}) = b(\underset{\underline{V}}{\mathrm{n.t.}}\mathfrak{L}(F,\mathfrak{X}\,\bar{\otimes}\,.)) = \underset{\underline{V}}{\mathrm{n.t.}}H(F,b(\mathfrak{X}\,\bar{\otimes}\,.)) \quad (\text{vgl. (VI.3)}).$$

Das ist ein Banachraum, wenn es eine Menge ist.

Sei $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ ein Morphismus in $\underline{V}$. Dann sei
$$\Delta F(f) : \Delta F(\mathfrak{X}) \to \Delta F(\mathfrak{Y}) \quad \text{für} \quad \alpha \in \Delta F(\mathfrak{X}) = b(\underset{\underline{V}}{\mathrm{n.t}}\,\mathfrak{L}(F,\mathfrak{X}\,\bar{\otimes}\,.))$$
definiert durch
$$[\Delta F(f)\ (\alpha)]_{\mathfrak{Z}} = b((f\,\bar{\otimes}\,1_{\mathfrak{Z}}) \circ \alpha_{\mathfrak{Z}}) \text{ für}$$

$\mathcal{Z} \in \underline{V}$, also $\Delta F(f)\,(\alpha) = b((f \bar{\otimes} 1.)\circ \alpha.)$ und $\Delta F(f) = b(\underset{\underline{V}}{\text{n.t.}}\,\mathcal{L}(F, f\bar{\otimes}\,.))$

Behauptung: das ist wohldefiniert.

Beweis: $(f\bar{\otimes} 1_{\mathcal{Z}})\circ \alpha_{\mathcal{Z}}\colon\ F(\mathcal{Z}) \to \mathfrak{X}\bar{\otimes}\mathcal{Z} \to \mathfrak{Y}\bar{\otimes}\mathcal{Z}$ ist stetig in den entsprechenden Topologien und natürlich in $\mathcal{Z}$ und

$$\|\Delta F(f)\,(\alpha)\| = \sup_{\mathcal{Z}\in \underline{V}} \|b(f\bar{\otimes} 1_{\mathcal{Z}})\ \ b(\alpha_{\mathcal{Z}})\|$$

$$\leqslant \|b(f)\| \sup_{\mathcal{Z}\in \underline{V}} \|b(\alpha_{\mathcal{Z}})\|$$

$$= \|b(f)\|\ \ \|\alpha\|.$$

ΔF wirkt selbstverständlich linear, auf den entsprechenden Morphismenräumen.

Für $g: \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}_1$ in $\underline{V}$ ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
F(\mathcal{Z}) \arrow[r, "\alpha_{\mathcal{Z}}"] \arrow[d, "F(g)"'] & \mathfrak{X}\bar{\otimes}\mathcal{Z} \arrow[r, "f\bar{\otimes}\mathcal{Z}"] \arrow[d, "\mathfrak{X}\bar{\otimes} g"] & \mathfrak{Y}\bar{\otimes}\mathcal{Z} \arrow[d, "\mathfrak{Y}\bar{\otimes} g"] \\
F(\mathcal{Z}_1) \arrow[r, "\alpha_{\mathcal{Z}_1}"] & \mathfrak{X}\bar{\otimes}\mathcal{Z}_1 \arrow[r, "f\bar{\otimes}\mathcal{Z}_1"] & \mathfrak{Y}\bar{\otimes}\mathcal{Z}_1
\end{tikzcd}$$

kommutativ, weil α natürlich ist; daher ist auch $\Delta F(f)\,(\alpha)$ natürlich und somit $\in b(\underset{\underline{V}}{\text{n.t.}}\,\mathcal{L}(F, \mathfrak{X}\bar{\otimes}\,.))$ und ΔF ist ein zulässiger Funktor (die übrigen Funktoreigenschaften sind trivial). qed.

Bemerkung: Wenn $\mathfrak{X}^*$ der Approximationsbedingung genügt und darüber hinaus noch die Radon-Nykodym Eigenschaft (vgl. J.DIESTEL) besitzt, dann ist

$$b(\mathfrak{X}\bar{\otimes}\mathfrak{Y}) = b\mathfrak{X}\,\hat{\otimes}\, b\mathfrak{Y} \text{ für jedes } \mathfrak{Y},$$

also $\Delta F(\mathfrak{X}) = \underset{\underline{V}}{\text{n.t.}}\,H(F, b\mathfrak{X}\,\hat{\otimes}\, b(.))$.

Im allgemeinen ist $\mathfrak{X}\otimes\mathfrak{Y}$ nicht dicht in $b(\mathfrak{X}\bar{\otimes}\mathfrak{Y})$.

<u>Definition:</u> Es seien $F, G : \underline{V} \to \underline{B}$ zulässige Funktoren und $\varphi : F \to G$ eine natürliche Transformation. Dann sei $\Delta(\varphi) : \Delta G \to \Delta F$ definiert durch $\Delta(\varphi)_{\mathfrak{X}}(\alpha)_{(..)} = \alpha \circ \varphi : F \to G \to \mathfrak{X}\bar{\otimes}.$ für $\alpha \in \Delta G(\mathfrak{X})$,
also $\Delta(\varphi)_{(.)} = b(\underset{\underline{V}}{\text{n.t.}}\, \mathfrak{L}(\varphi_{(..)}, (.) \bar{\otimes} (..)))$.

<u>Behauptung:</u> Damit ist Δ ein kontravarianter Funktor
$\mathrm{Funkt}_{ko}(\underline{V}, \underline{B}) \to \mathrm{Funkt}_{ko}(\underline{V}, \underline{B})$, der auf den Morphismenräumen n.t.H(F,G) eine lineare Kontraktion erzeugt.

<u>Beweis:</u> $\Delta(\varphi)_{\mathfrak{X}}(\alpha) = \alpha \circ \varphi : F \to G \to \mathfrak{X}\bar{\otimes}$, ist eine natürliche Transformation, weil α und φ es sind.
$\| b(\alpha\varphi) \| \leqslant \| b(\alpha) \| \cdot \| b(\varphi) \|$.
Trivialerweise respektiert Δ Zusammensetzungen von Morphismen und Identitäten und ist linear und Kontraktion. Wir müssen nur noch nachrechnen, ob $\mathfrak{X} \to \Delta(\varphi)_{\mathfrak{X}}$ natürlich ist.
Sei $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ aus $\underline{V}$. Wir müssen feststellen, ob das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{tikzcd}
\Delta G(\mathfrak{X}) \arrow[r, "\Delta(\varphi)_{\mathfrak{X}}"] \arrow[d, "\Delta G(f)"'] & \Delta F(\mathfrak{X}) \arrow[d, "\Delta F(f)"] \\
\Delta G(\mathfrak{Y}) \arrow[r, "\Delta(\varphi)_{\mathfrak{Y}}"] & \Delta F(\mathfrak{Y}).
\end{tikzcd}$$

Sei $\alpha \in \Delta G(\mathfrak{X})$. Dann ist

$$\Delta F(f) \circ \Delta(\varphi)_{\mathfrak{X}}(\alpha) = \Delta F(f)\,(\alpha \circ \varphi) = b((f \bar{\otimes} 1.) \circ \alpha \circ \varphi)$$
$$\Delta(\varphi)_{\mathfrak{Y}} \circ \Delta G(f)\,(\alpha) = \Delta(\varphi)_{\mathfrak{Y}}(b((f \bar{\otimes} 1.)\,\alpha) = b((f \bar{\otimes} 1.) \circ \alpha \cdot \varphi).$$

qed.

<u>Satz:</u> Seien $F, G : \underline{V} \to \underline{B}$ Funktoren. Dann gilt
$\underset{\underline{V}}{\text{n.t.}}H(F, \Delta G) = \underset{\underline{V}}{\text{n.t.}}T(G, \Delta F)$ isometrisch isomorph und natürlich in F und G, das heißt Δ ist zu sich selbst adjungiert zur Rechten.

<u>Beweis:</u> Für $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ $\in \underline{V}$ gilt isometrisch:

$$H(F(\mathfrak{X}),\ b\,\mathfrak{L}(G(\mathfrak{Y}),\ \mathfrak{X}\bar{\otimes}\mathfrak{Y}))$$
$$= H(F(\mathfrak{X})\ H(G(\mathfrak{Y}),b(\mathfrak{X}\bar{\otimes}\mathfrak{Y})))$$
$$= H(F(\mathfrak{X})\hat{\otimes}G(\mathfrak{Y}),\ b(\mathfrak{X}\bar{\otimes}\mathfrak{Y}))$$
$$= H(G(\mathfrak{Y}),\ H(F(\mathfrak{X}),\ b(\mathfrak{X}\bar{\otimes}\mathfrak{Y})))$$
$$= H(G(\mathfrak{Y}),\ b\,\mathfrak{L}(F(\mathfrak{X}),\ \mathfrak{Y}\bar{\otimes}\mathfrak{X}))$$

Sei $\varphi \in \underset{\underline{V}}{\text{n.t.}}H(F,\Delta G)$, dann ist

$\varphi_{\mathfrak{X}}: F(\mathfrak{X}) \to \Delta G(\mathfrak{X})$; für $x \in F(\mathfrak{X})$ ist

$\varphi_{\mathfrak{X}}(x) \in \Delta G(\mathfrak{X}) = \underset{\underline{V}}{\text{n.t.}}H(G,\ b(\mathfrak{X}\bar{\otimes}\,.))$; also

$\varphi_{\mathfrak{X}}(.)_{\mathfrak{Y}}\ :\ F(\mathfrak{X}) \to H(G(\mathfrak{Y}),\ b(\mathfrak{X}\bar{\otimes}\mathfrak{Y}))$

und diesem Element ist unter dem obigen Isomorphismus das folgende zugeordnet:

$\hat{\varphi}_{\mathfrak{Y}}(..)_{\mathfrak{X}} : G(\mathfrak{Y}) \to H(F(\mathfrak{X}),\ b(\mathfrak{Y}\bar{\otimes}\mathfrak{X}))$,

wobei $\varphi_{\mathfrak{X}}(x)_{\mathfrak{Y}}(y) = {}^{t}(\hat{\varphi}_{\mathfrak{Y}}(y)_{\mathfrak{X}}(x))$ für $x \in F(\mathfrak{X})$ und $y \in G(\mathfrak{Y})$ gilt, und ${}^{t} : b(\mathfrak{Y}\bar{\otimes}\mathfrak{X}) \to b(\mathfrak{X}\bar{\otimes}\mathfrak{Y})$ der kanonische Isomorphismus ist.

Außerdem gilt $\|\varphi_{\mathfrak{X}}(.)_{\mathfrak{Y}}(..)\| = \|\hat{\varphi}_{\mathfrak{Y}}(..)_{\mathfrak{X}}(.)\|$, wir haben also nur noch die Natürlichkeiten nachzuprüfen:

1) Sei $\varphi \in$ n.t.$H(F,\Delta G)$, zz: $\hat{\varphi} \in$ n.t.$H(G,\Delta F)$.

Sei $x \in F(\mathfrak{X})$, $y \in G(\mathfrak{Y})$,

$f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}_1$ $\quad g : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Y}_1$ in $\underline{V}$.

Zunächst müssen wir $\hat{\varphi}_{\mathfrak{Y}}(y) \in \Delta F(\mathfrak{Y})$ zeigen:

$$\begin{tikzcd}
F(\mathfrak{X}) \arrow[r, "\hat{\varphi}_{\mathfrak{Y}}(y)_{\mathfrak{X}}"] \arrow[d, "F(f)"'] & \mathfrak{Y}\bar{\otimes}\mathfrak{X} \arrow[d, "\mathfrak{Y}\bar{\otimes}f"] \\
F(\mathfrak{X}_1) \arrow[r, "\hat{\varphi}_{\mathfrak{Y}}(y)_{\mathfrak{X}_1}"] & \mathfrak{Y}\bar{\otimes}\mathfrak{X}_1
\end{tikzcd}$$

ist kommutativ,

$$
\begin{aligned}
\text{denn}\quad & (\mathfrak{Y} \tilde{\otimes} \mathfrak{f})\,\hat{\varphi}_{\mathfrak{Y}}(y)_{\mathfrak{X}}(x) \\
&= (\mathfrak{Y} \tilde{\otimes} \mathfrak{f})\,{}^{t}(\varphi_{\mathfrak{X}}(x)_{\mathfrak{Y}}(y)) \\
&= {}^{t}((\mathfrak{f} \tilde{\otimes} \mathfrak{Y})\,\varphi_{\mathfrak{X}}(x)_{\mathfrak{Y}}(y)) \\
&= {}^{t}(\varphi_{\mathfrak{X}_1}(F(f)x)_{\mathfrak{Y}}(y)) \text{ , weil } \mathfrak{X} \to \varphi_{\mathfrak{X}} \text{ natürlich ist,} \\
&= \hat{\varphi}_{\mathfrak{X}}(y)_{\mathfrak{X}_1} F(f)x \,.
\end{aligned}
$$

Also wissen wir, daß $\mathfrak{X} \longmapsto \hat{\varphi}_{\mathfrak{Y}}(y)_{\mathfrak{X}}$ natürlich ist

bei festem $\mathfrak{Y}$ und y.

Nun zeigen wir, daß auch $\mathfrak{Y} \mapsto \hat{\varphi}_{\mathfrak{Y}}$ natürlich ist:

$$
\begin{tikzcd}
G(\mathfrak{Y}) \arrow[r, "\hat{\varphi}_{\mathfrak{Y}}"] \arrow[d, "G(g)"'] & \Delta F(\mathfrak{Y}) \arrow[d, "\Delta F(g)"] \\
G(\mathfrak{Y}_1) \arrow[r, "\hat{\varphi}_{\mathfrak{Y}_1}"] & \Delta F(\mathfrak{Y}_1)
\end{tikzcd}
$$

ist kommutativ, denn es gilt:

$[\Delta F(g)\circ\hat{\varphi}_{\mathfrak{y}}(y)]_{\mathfrak{X}}(x) =$

$= (g\bar{\otimes} 1_{\mathfrak{X}})\circ\hat{\varphi}_{\mathfrak{y}}(y)_{\mathfrak{X}}(x)$

$= (g\bar{\otimes} 1_{\mathfrak{X}})\ {}^{t}(\varphi_{\mathfrak{X}}(x)_{\mathfrak{y}}(y))$

$= {}^{t}((1_{\mathfrak{X}}\bar{\otimes} g)\ \varphi_{\mathfrak{X}}(x)_{\mathfrak{y}}(y))$

$= {}^{t}(\varphi_{\mathfrak{X}}(x)_{\mathfrak{y}_1}\circ G(g)y)$ weil $\mathfrak{y}\mapsto\varphi_{\mathfrak{X}}(x)_{\mathfrak{y}}$ natürlich ist.

$= \quad G(g)y \quad (x).$

und zwar für alle $\mathfrak{X}$ und x.

2) Wenn $\hat{\varphi}\in$ n.t.H(G, ΔF) ist, dann ist $\varphi\in$ n.t.H(F, ΔG) (man vertausche F und G).

3) Für $\eta : F^1 \to F$ und $\mu : G^1 \to G$ ist

$$\begin{tikzcd}
\text{n.t.H}(F, \Delta G) \arrow[r, "\wedge"] \arrow[d, "{\text{n.t.H}(\eta, \Delta(\mu))}"'] & \text{n.t.H}(G, \Delta F) \arrow[d, "{\text{n.t.H}(\mu, \Delta(\eta))}"] \\
\text{n.t.H}(F^1, \Delta G^1) \arrow[r, "\wedge"] & \text{n.t.H}(G^1, \Delta F^1)
\end{tikzcd}$$

kommutativ, denn für $y\in G^1(\mathfrak{y})$, $x\in F^1(\mathfrak{X})$ ist

$[\text{n.t.H}(\mu, \Delta(\eta))\ (\hat{\varphi})]_{\mathfrak{y}}(y)_{\mathfrak{X}}(x) =$

$= [\Delta(\eta)_{\mathfrak{y}}\circ\hat{\varphi}_{\mathfrak{y}}\circ\mu_{\mathfrak{y}}](y)_{\mathfrak{X}}(x)$

$= [\Delta(\eta)_{\mathfrak{y}}(\hat{\varphi}_{\mathfrak{y}}(\mu_{\mathfrak{y}}(y))]_{\mathfrak{X}}(x)$

$= \hat{\varphi}_{\mathfrak{y}}(\mu_{\mathfrak{y}}(y))_{\mathfrak{X}}\circ\eta_{\mathfrak{X}}(x)$

$= {}^{t}(\varphi_{\mathfrak{X}}(\eta_{\mathfrak{X}}(x))_{\mathfrak{y}}(\mu_{\mathfrak{y}}(y)))$

$= {}^{t}[(\varphi_{\mathfrak{X}}(\eta_{\mathfrak{X}}(x))\circ\mu)_{\mathfrak{y}}(y)]$

$= {}^{t}[(\Delta(\mu)_{\mathfrak{X}}(\varphi_{\mathfrak{X}}\circ\eta_{\mathfrak{X}}(x)))_{\mathfrak{y}}(y)]$

$= {}^{t}[(\Delta(\mu)\circ\varphi\circ\eta)_{\mathfrak{X}}(x)_{\mathfrak{y}}(y)]$

$= [{}^{\wedge}(\Delta(\mu)\circ\varphi\circ\eta)]_{\mathfrak{y}}(y)_{\mathfrak{X}}(x)$

$= [{}^{\wedge}\circ\text{n.t.H}(\eta, \Delta(\mu))\ (\varphi)]_{\mathfrak{y}}(y)_{\mathfrak{X}}(x).$ qed.

Korollar: Δ führt induktive Limiten in projektive Limiten über.

(VII.2) Der Δ-Duale spezieller Funktoren

Satz 1: Für $Y \in \underline{B}$ ist $\Delta(H^Y \circ {}^*) = b(.\,\bar{\otimes}\, Y')$ natürlich in Y.

Beweis: Nach (VI.3) Satz 3 gilt

$$\Delta(H^Y \circ {}^*)\ (\mathfrak{X}) = b(\text{n.t.}\ \mathfrak{L}(H^{Y} \circ {}^*, \mathfrak{X}\,\bar{\otimes}\,.))$$

$$= b(\mathfrak{X}\,\bar{\otimes}\, Y') \quad \text{für } \mathfrak{X} \in \underline{W} \text{ und natürlich in } Y.$$

Wir müssen also nur noch die Natürlichkeit in $\mathfrak{X}$ nachweisen.

$T_Y^{(\mathfrak{X})} : \text{n.t.}\ \mathfrak{L}(H^Y \circ {}^*, \mathfrak{X}\bar{\otimes}.) \to \mathfrak{X}\bar{\otimes} Y'$ war gegeben durch

$T_Y^{(\mathfrak{X})}(\varphi) = \varphi_{Y'}(1_Y)$.

Sei $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}_1$ in $\underline{W}$.

Dann ist

$$\begin{tikzcd}
\Delta(H^Y \circ {}^*)\ (\mathfrak{X}) \arrow[r, "b(T_Y^{(\ )})"] \arrow[d, "\Delta(H^Y \circ {}^*)\ (f)"'] & b(\mathfrak{X}\bar{\otimes} Y') \arrow[d, "b(f\bar{\otimes} Y')"] \\
\Delta(H^Y \circ {}^*)\ (\mathfrak{X}_1) \arrow[r, "b(T_Y^{(1)})"] & b(\mathfrak{X}_1\bar{\otimes} Y')
\end{tikzcd}$$

kommutativ, denn

$$\begin{aligned}
& b(f\bar{\otimes} Y') \circ b(T_Y^{(\mathfrak{X})})\ (\varphi) \\
= {} & b((f\bar{\otimes} Y') \circ \varphi_{Y'}(1_Y)) \\
= {} & b((f\bar{\otimes} Y') \circ \varphi_{Y'})\ (1_Y) \\
= {} & [\,\Delta(H^Y \circ {}^*)\ (f)\ (\varphi)]_{Y'}(1_Y) \\
= {} & T_Y^{(\mathfrak{X}_1)} \circ \Delta(H^Y \circ {}^*)\ (f)\ (\varphi)
\end{aligned}$$

qed

Satz 2: Für $Y \in \underline{B}$ ist $\Delta(H_Y \circ b) = b(.\,\bar{\otimes}\, Y'')$ natürlich in Y.

Beweis:
$$\begin{aligned}
H_Y \circ b(\mathfrak{X}) &= H(Y, b\,\mathfrak{X}) = b\,\mathfrak{L}(Y, \mathfrak{X}) = b\,\mathfrak{L}(\mathfrak{X}^*, Y') \\
&= b\,H(\mathfrak{X}^*, b(Y')) \\
&= H^{b(Y')} \circ {}^*(\mathfrak{X})
\end{aligned}$$

natürlich in $\mathfrak{X}$ und Y.

Nach Satz 1 ist also

$$\Delta(H_Y \circ b) = \Delta(H^{b(Y')} \circ {}^*)$$
$$= b(.\,\bar{\otimes}(b(Y'))')$$
$$= b(.\,\bar{\otimes} Y'')$$

qed.

<u>Satz 3:</u> $\Delta b = b$, also ist b selbst - Δ -dual.

<u>Beweis:</u> Für $\varphi \in \Delta b(\mathfrak{X}) = b(\text{n.t.}\,\mathfrak{L}(b, \mathfrak{X}\bar{\otimes}\,.))$ ist

$\varphi_I \in b\,\mathfrak{L}(b\,I, \mathfrak{X}\bar{\otimes} I) = H(I, b\mathfrak{X}) = b\mathfrak{X}$,

wobei I der Grundkörper ist.

Wir definieren daher

$T_{\mathfrak{X}}: \ \Delta b(\mathfrak{X}) \to b(\mathfrak{X})$ durch

$T_{\mathfrak{X}}(\varphi) = \varphi_I(1)$, $1 \in I$.

Dann ist $\| T_{\mathfrak{X}}(\varphi)\| = \| \varphi_I\,(1)\| \leqslant \|\varphi_I\| \leqslant \|\varphi\|$,

also $\|T_{\mathfrak{X}}\| \leqslant 1$.

Für jedes $x \in b\mathfrak{X}$ sei $\hat{x} : I \to b\mathfrak{X}$, $\hat{x}\,(1) = x$.

Für $\mathfrak{Y} \in \underline{W}$ sei ${}^k : \mathfrak{Y} \to I\bar{\otimes}\mathfrak{Y}$ der Isomorphismus $y \mapsto 1 \otimes y$.

Für $\mathfrak{X} \in \underline{W}$ sei $U_{\mathfrak{X}} : b\mathfrak{X} \to \Delta(b)\ (\mathfrak{X})$ definiert durch

$U_{\mathfrak{X}}(x)_{\mathfrak{Y}} = (\hat{x}\bar{\otimes} 1_{\mathfrak{Y}}) \circ {}^k : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}\bar{\otimes}\mathfrak{Y}$.

Dann ist $\| U_{\mathfrak{X}}(x)_{\mathfrak{Y}} \| \leqslant \|\hat{x}\| = \|x\|$, also ist $U_{\mathfrak{X}}(x)_{\mathfrak{Y}} \in b\mathfrak{L}(b\mathfrak{Y}, \mathfrak{X}\bar{\otimes}\mathfrak{Y})$,

darüberhinaus ist $\mathfrak{Y} \mapsto (\hat{x}\bar{\otimes} 1_{\mathfrak{Y}}) \circ {}^k$ klarerweise natürlich, also

ist $U_{\mathfrak{X}}(x) \in b(\text{n.t.}\,\mathfrak{L}(b, \mathfrak{X}\bar{\otimes}.)$.

$$[U_{\mathfrak{X}} \circ T_{\mathfrak{X}}(\varphi)\,]_{\mathfrak{Y}}(y) = U_{\mathfrak{X}}(\varphi_I(1))_{\mathfrak{Y}}(y)$$
$$= (\widehat{\varphi_I(1)}\,\bar{\otimes}\, 1_{\mathfrak{Y}})\ ({}^k y)$$
$$= (\varphi_I \bar{\otimes} 1_{\mathfrak{Y}})\ (1 \otimes y)$$
$$= (\varphi_I\ \bar{\otimes}\ 1_{\mathfrak{Y}})\ (1_I \bar{\otimes} \hat{y})\ (1 \otimes 1)$$
$$= (1_{\mathfrak{X}}\bar{\otimes}\hat{y})\ (\varphi_I \bar{\otimes} 1_I)\ (1 \otimes 1)$$

$$= (1_{\mathfrak{X}} \tilde{\otimes} \hat{y})\,\varphi_I(1)$$

$$= \varphi_{\mathfrak{Y}} \circ b(\hat{y})\ (1) \quad \text{weil } \varphi \text{ natürlich ist.}$$

$$= \varphi_{\mathfrak{Y}}\ (y).$$

$$T_{\mathfrak{X}} \circ U_{\mathfrak{X}}(x) = U_{\mathfrak{X}}(x)_I\ (1)$$

$$= (\hat{x} \tilde{\otimes} 1_I)\ (1 \otimes 1)$$

$$= x \otimes 1 \quad = \quad x.$$

Somit ist $T_{\mathfrak{X}} = U_{\mathfrak{X}}^{-1}$, $\|T_{\mathfrak{X}}\| \leqslant 1$, $\|U_{\mathfrak{X}}\| \leqslant 1$, also ist $T_{\mathfrak{X}}$ für jedes $\mathfrak{X}$ ein isometrischer Isomorphismus; Wir zeigen noch, daß $\mathfrak{X} \longmapsto T_{\mathfrak{X}}$ natürlich ist:

Sei $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}_1$ in $\underline{W}$. Dann ist

$$b(f) \circ T_{\mathfrak{X}}(\varphi) = b(f)\,\varphi_I(1)$$

$$= b((f \tilde{\otimes} 1_I) \circ \varphi_I)\ (1)$$

$$= T_{\mathfrak{X}_1}(b((f \tilde{\otimes} 1.) \circ \varphi))$$

$$= T_{\mathfrak{X}_1} \circ \Delta b(f)\ (\varphi).$$

qed.

<u>Bemerkungen:</u> 1) Es ist nicht gelungen, $\Delta(b(\mathfrak{X}\tilde{\otimes}.))$ zu berechnen; doch wegen $\Delta(b(\mathfrak{X}\tilde{\otimes}.))\ (\mathfrak{Y}) = b(\text{n.t.}\,\mathfrak{L}(b(\mathfrak{X}\tilde{\otimes}.), \mathfrak{Y}\tilde{\otimes}.))$ könnte man vermuten, daß

$\Delta(b(\mathfrak{X}\tilde{\otimes}.)) = b\,\mathfrak{L}(b\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = H(b\mathfrak{X}, b\mathfrak{Y})$ ist.

Dann wäre etwa

$\Delta\Delta(H^Y \circ {}^*) = \Delta(b(Y'\tilde{\otimes}.)) = H_{bY'} \circ b = H^{bY''} \circ {}^*$ also $H^Y \circ {}^*$ genau dann reflexiv, wenn Y reflexiv ist.

2) Man kann die in IV. entwickelten Methoden auch hier anwenden und die Δ-Dualität auf "Linksideale" zurückzuführen. Man wird dann vermutlich auf die Dualität von Linksidealen stoßen, die PIETSCH in der zitierten Arbeit eingeführt hat. Die Ergebnisse von PIETSCH wiederum würden Aussagen liefern wie $\Delta F = \Delta F_e$, eine Gleichung, um die man sich bei D lange vergeblich bemüht hat.

Corrigendum

Zum Beweis des Lemmas aus (I.1) auf Seite 8 benötigt man das folgende

Lemma: Seien A und X Banachräume,

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i' \in A \otimes X', \quad a' \in A', \ x \in X, \ x'' \in X'' .$$

Dann ist

$$\lambda(u) = \sup_{\|a'\| \leqslant 1, \ \|x\| \leqslant 1} \left| \sum \langle a_i, a' \rangle \langle x, x_i' \rangle \right|$$

Beweis: Nach Definition ist

$$\lambda(u) = \sup_{\|a'\| \leqslant 1, \ \|x\| \leqslant 1} \left| \sum \langle a_i, a' \rangle \langle x_i', x'' \rangle \right|$$

$$\geqslant \sup_{\|a'\| \leqslant 1, \ \|x\| \leqslant 1} \left| \sum \langle a_i, a' \rangle \langle x, x_i' \rangle \right| .$$

Sei $\epsilon > 0$. Dann existieren $a_0' \in A'$ mit $\|a_0'\| \leqslant 1$, $x_0'' \in X''$ mit $\|x_0''\| \leqslant 1$, sodaß gilt:

$$\left| \sum \langle a_i, a_0' \rangle \langle x_i', x_0'' \rangle \right| \geqslant \lambda(u) - \frac{\epsilon}{2} .$$

Weil X in X'' $\sigma(X'', X')$ dicht ist, existiert ein $x_0 \in X$ mit $\|x_0\| \leqslant 1$, sodaß für i=1,...,2 gilt:

$$\left| \langle x_0, x_i' \rangle - \langle x_i', x_0'' \rangle \right| \leqslant \frac{\epsilon}{2n\, |\langle a_i, a' \rangle} \qquad \text{für } \langle a_i, a' \rangle \neq 0$$

$$\leqslant \frac{\epsilon}{2n} \qquad \text{sonst}$$

Dann ist

$$\left| \sum \langle a_i, a_0' \rangle \langle x_i', x_0'' \rangle - \sum \langle a_i, a_0' \rangle \langle x_0, x_i' \rangle \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \left| \langle a_i, a_0' \rangle \right| \left| \langle x_i', x_0'' \rangle - \langle x_0, x_i' \rangle \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{\epsilon}{2n} = \frac{\epsilon}{2}$$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \langle a_i, a_0' \rangle \langle x_0, x_i' \rangle \right| \geqslant \left| \sum \langle a_i, a_0' \rangle \langle x_i', x_0'' \rangle \right| - \frac{\epsilon}{2}$$

$$\geqslant \lambda(u) - \epsilon. \qquad \text{qed}$$

Literatur:

BUCHWALTER Henri:

Topologies, bornologies et compactologies, Thèse Doc.Sc. Math.Fac.Sc.Lyon (1968)

CIGLER Johann:

Funktoren auf Kategorien von Grothendieckräumen (1972)

DIESTEL,J.:

The Randon Nikodym property and the coincidence of integral and nuclear operators . Rev.Roum.Math.pures et appl. 42/10(1972) p.1611

GROTHENDIECK Alexander:

Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Memoirs of the AMS 16(1955)

LEVIN,V.L.:

Tensor-products and functors in categories of Banach-spaces defined by KB-Lineals. Trudy Moskov.Mat.Obsc. Tom 20(1969), Transl.Moskow.Math,Soc. Vol.20(1969) 41-77

LINTON,F.E.J.:

Autonomous categories and duality of functors, Journal of Algebra 2(1965) 315-349

MAC LANE Saunders:

Kategorien, Springer Verlag 1972

MITJAGIN,B.S. - A.S.SHVARTS:

Functors in Categories of Banach-spaces. Russian Math. Surveys 19,No.2(1964), 65-127

PIETSCH Albrecht:

Ideale von S_p-Operatoren in Banachräumen, Studia Mathematica 38(1970) 59-69

POKASEJEVA,R.S., A.S.SHVARTS:

Dualität von Funktoren (russ.) Matem.Sbornik 71(1966) 357-385

POTHOVEN Kenneth L.:

Compact functors and their duals in categories of Banach-spaces. Trans.of the AMS 155(1970) 149-159

RIEFFEL Marc A.:

Induced Banach-representations of Banach-algebras and locally compact groups. Journal of functional analysis 1(1967) 443-491

SCHATTEN Robert:

A theory of crosspaces, Ann.of Math.Studies no.26,Princeton University press, Princeton, N.J.1950, MR 12,186.

SEMADENI, Z.:

Banach spaces of continuous functions I, Monografic matematycne Tom 55

WAELBROECK Lucien:

Some theorems about Bounded Structures, J.Functional Anal.1 (1967) 392-408