UE Komplexe Analysis

[Modul: “Komplexe Analysis” (KAN)]

Version 1.0

Markus Fulmek

Wintersemester 2019

Die Übungsbeispiele zur Vorlesung *Komplexe Analysis* stehen hier als gesondertes Übungsskript zur Verfügung (alle Beispiele sind auch im Skriptum zur Vorlesung enhalten). Die Beispiele sind von unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad (d.h.: teils sehr einfach;-) und illustrieren den in der Vorlesung behandelten Stoff.
Dies ist Version 1.0 der Übungsbeispiele: Hinweise auf Fehler und Ungereimtheiten nehme ich dankbar entgegen und arbeite sie gerne in die nächste Version dieses Übungsskripts ein.
Widerstehen Sie der Versuchung, die Lösungen der Beispiele durch Computeralgebra oder Internetrecherche zu finden, dann belohnen Sie sich selbst mit vielen schönen Aha–Erlebnissen!

Markus Fulmek, 20. September 2019.

KAPITEL 1

Grundlagen

1.1. Topologische Grundlagen

1.2. Der Körper der komplexen Zahlen

Aufgabe 1: *Zeige, daß* $|z+1| > |z-1|$ *genau dann gilt, wenn* $\Re(z) > 0$.

Aufgabe 2: *Zeige: Wenn* $\Im(a) > 0$ *und* $\Im(b) > 0$, *dann gilt*

$$\frac{|a-b|}{\left|a-\overline{b}\right|} < 1.$$

Illustriere den geometrischen Sachverhalt durch eine Skizze.

Aufgabe 3: *Zeige, daß für* $a, b \in \mathbb{C}$ *gilt:*

$$|1-\overline{a}\cdot b|^2 - |a-b|^2 = \left(1-|a|^2\right)\cdot\left(1-|b|^2\right).$$

Folgere daraus für $|a| < 1$ *und* $|b| < 1$*:*

$$\frac{|a-b|}{|1-\overline{a}\cdot b|} < 1.$$

Aufgabe 4: *Zeige, daß die Abbildungen* $z \mapsto |z|$, $z \mapsto \Re(z)$ *und* $z \mapsto \overline{z}$ *auf ganz* $\mathbb{C}$ stetig *sind.*

Aufgabe 5: *Sei* $f : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ *definiert durch*

$$f(z) = f(x + \mathrm{i}\cdot y) = \frac{x\cdot y}{x^2+y^2}.$$

Existiert der Limes $\lim_{z\to 0} f(z)$*?*

Aufgabe 6: *Seien* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *und* a, b *nicht beide* 0. *Zeige, daß der Abstand von* $(0,0)$ *zur Menge* $\{(x,y) : a\cdot x + b\cdot y + c = 0\}$ *gleich* $\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ *ist. Folgere, daß der Abstand von* 0 *zur Geraden durch die Punkte* z_1 *und* z_2 *(*$z_1 \neq z_2$*) gegeben ist durch*

$$\frac{|\Im(z_1\cdot\overline{z_2})|}{|z_1-z_2|}.$$

1.3. Folgen und Reihen

Aufgabe 7: *Sei* $(f_n : A \to \mathbb{C})$ *eine Folge von* gleichmäßig stetigen *Funktionen, die auf* A gleichmäßig *gegen* f *konvergiert. Zeige: Dann ist auch* f *gleichmäßig stetig.*

Aufgabe 8: *Sei* $\sum a_n\cdot z^n = s(z)$ *für* $|z| < R$ *für ein* $R > 0$.

(1) *Zeige: Wenn* $s(x)$ reell *ist für reelles* $x \in (-R, R)$, *dann sind auch alle Koeffizienten* a_n *reell.*

(2) *Zeige: Wenn* s *eine* gerade *Funktion ist (also* $s(-z) = s(z)$ *für* $|z| < R$, *dann sind alle Koeffizienten* a_n *mit ungeradem Index* $n = 2k+1$ *gleich* 0.

Aufgabe 9: *Sei (a_n) eine Folge* nichtnegativer *reeller Zahlen, und sei $\sum a_n \cdot R^n$ konvergent für ein $R > 0$. Zeige, daß dann $\sum a_n \cdot z^n$ konvergent ist für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = R$.*
Zeige durch ein Gegenbeispiel, daß das nicht stimmt, wenn wir die Bedingung $a_n \geqslant 0$ weglassen.

Aufgabe 10: *Zeige, daß $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ nicht auf ganz $D(0,1)$* gleichmäßig *konvergiert.*

Aufgabe 11: *Für eine Folge (u_n) reeller Zahlen ist der Limes Superior bekanntlich definiert als*

$$\limsup u_n \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{r\geqslant 1} \sup_{n\geqslant r} u_n = \inf\left\{\sup\left\{u_n : n \geqslant r\right\} : r \in \mathbb{N}\right\}.$$

Zeige die Formel von Cauchy–Hadamard *(benannt nach Augustin–Louis Cauchy (1789–1857) und Jacques Hadamard (1865–1963)): Der Konvergenzradius R der Potenzreihe $\sum a_n \cdot z^n$ ist*

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

(mit den "üblichen" Konventionen $\frac{1}{0} = \infty$ und $\frac{1}{\infty} = 0$).

1.4. Geradenstücke und Konvexität

Aufgabe 12: *Sei A eine Teilmenge eines reellen Vektorraums, und sei $a \in A$: Beschreibe die kleinste Obermenge S von A (also $A \subseteq S$), die in bezug auf a sternförmig ist.*

Aufgabe 13: *Für $A, B \subseteq X$ Teilmengen eines reellen Vektorraums X und $\lambda \in \mathbb{R}$ definieren wir*

$$A + b \stackrel{\text{def}}{=} \{a + b : a \in A, b \in B\},$$
$$\lambda \cdot A \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda \cdot a : a \in A\}.$$

Zeige:

(1) *Wenn A und B konvex sind, dann ist auch $A + B$ konvex.*
(2) *Wenn A konvex ist und $\lambda, \mu > 0$, dann ist $\lambda \cdot A + \mu \cdot A = (\lambda + \mu) \cdot A$.*

1.5. Komplexwertige Funktionen einer reellen Variable

Aufgabe 14: *Sei $\phi : [0,1] \to \mathbb{C}$ ein Weg. Zeige: Wenn $|\phi(0)| < 1$ und $|\phi(1)| > 1$, dann enthält $\phi^\star$ einen Punkt mit Betrag 1.*

Aufgabe 15: *Zeige: $L(\phi + \psi) = L(\phi) + L(\psi)$.*

1.6. Differentiation komplexer Funktionen

Aufgabe 16: *Zeige* direkt *aus der Definition (also* ohne *Benützung der Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen):*

(1) *Die Funktion $z \mapsto \overline{z}$ ist nirgends (komplex) differenzierbar,*
(2) *die Funktion $z \mapsto z \cdot \overline{z}$ ist nur in 0 (komplex) differenzierbar.*

Aufgabe 17: *Bestimme die Menge der Punkte, für die die folgenden Funktionen (komplex) differenzierbar sind:*

(1) $f(x + \mathbb{i} \cdot y) = x^2 + 2 \cdot \mathbb{i} \cdot x \cdot y$,
(2) $f(x + \mathbb{i} \cdot y) = 2 \cdot x \cdot y + \mathbb{i}\left(x + \frac{2}{3} \cdot y^3\right)$.

Aufgabe 18: *Zeige: Jede holomorphe Funktion der Form $f(x + \mathbb{i} \cdot y) = u(x) + \mathbb{i} \cdot v(y)$ (wobei u, v* reelle *Funktionen sind) läßt sich schreiben als $f(z) = \lambda \cdot z + c$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ und ein $c \in \mathbb{C}$.*

Aufgabe 19: *Zeige: Wenn f holomorph ist und $|f|$ auf $D(a,r)$ konstant ist, dann ist f selbst auf $D(a,r)$ konstant.*

Aufgabe 20: *Definiere $f(0) = 0$ und*

$$f(x + \mathbb{i} \cdot y) = \frac{(1 + \mathbb{i})\, x^3 - (1 - \mathbb{i})\, y^3}{x^2 + y^2} \text{ für } (x, y) \neq (0, 0).$$

Zeige: f erfüllt die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen im Punkt 0, ist aber nicht *in 0 differenzierbar.*

Hinweis: Es genügt, die Ableitungen im Punkt 0 zu berechnen.

Aufgabe 21: *Zeige: Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\zeta = \lambda + \mathbb{i} \cdot (1 - \lambda)$ gilt $\left|\zeta^2\right| > \frac{1}{3}$. Folgere, daß es für $f(z) = z^3$ keinen Punkt ζ auf dem Geradenstück $[1 : \mathbb{i}]$ gibt, der $f(\mathbb{i}) - f(1) = (\mathbb{i} - 1) \cdot f'(\zeta)$ erfüllt.*

Aufgabe 22: *Sei $u(x, y)$ der Realteil einer holomorphen Funktion $f(x + \mathbb{i} \cdot y)$, die auf einer offenen Menge $A \subseteq \mathbb{C}$ definiert ist. Zeige: Wenn die* zweiten *(reellen) Ableitungen (bezeichne diese mit $u_{x,x}, u_{x,y}, u_{y,x}$ und $u_{y,y}$; also in der Notation der Vorlesung: $u_{x,y} = (u_{1,0})_{0,1}$ etc.) von u existieren und auf A stetig sind, dann gilt auf A:*

$$u_{x,x} + u_{y,y} = 0.$$

(D.h., u ist eine harmonische Funktion.*)*

1.7. Die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen

Aufgabe 23: *Bestimme die Nullstellen von $\mathbb{e}^z + 1$, $\sinh(z)$, $\cosh(z)$, $\frac{1}{\mathbb{e}} - \mathbb{e}^z$ und $1 + \mathbb{i} - \mathbb{e}^z$.*

Aufgabe 24: *Seien $t, u \in \mathbb{R}$ mit $|t - u| < \pi$. Zeige: $\frac{t+u}{2}$ ist ein Argument von $\mathbb{e}^{\mathbb{i} \cdot t} + \mathbb{e}^{\mathbb{i} \cdot u}$, und bestimme den Betrag von $\mathbb{e}^{\mathbb{i} \cdot t} + \mathbb{e}^{\mathbb{i} \cdot u}$.*

Aufgabe 25: *Zeige: $\frac{1 - \cos(x)}{x} \to 0$ für $x \to 0$. Folgere: $n \cdot (\omega_n - 1) \to 2\pi\mathbb{i}$ für $n \to \infty$, wobei $\omega_n = \exp\left(\frac{2\pi\mathbb{i}}{n}\right)$.*

Aufgabe 26: *Sei $x \in \mathbb{R}$* kein *ganzzahliges Vielfaches von 2π, sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige:*

$$1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cdots + \cos((n-1) \cdot x) = \cos\left(\frac{(n-1) \cdot x}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{n \cdot x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\sin(x) + \sin(2x) + \cdots + \sin((n-1) \cdot x) = \sin\left(\frac{(n-1) \cdot x}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{n \cdot x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Aufgabe 27: *Zeige: Wenn $x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$, dann ist $\cos(x + \mathbb{i} \cdot y)$ reell genau dann, wenn x ein ganzzahliges Vielfaches von π ist. Beschreibe auch die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, für die $\sin(z)$ reell ist und folgere: Wenn $\cos(z)$* und *$\sin(z)$ beide reell sind, dann ist z reell.*

Aufgabe 28: *Betrachte die komplexe Funktion*

$$f(z) = z \cdot \sin\left(\frac{1}{z}\right) \text{ für } z \neq 0, f(0) = 0.$$

Ist f stetig bei 0?

Aufgabe 29: *Sei f holomorph und $f(z_0) \neq 0$, sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige: Dann gibt es eine Umgebung U von z_0 und eine holomorphe Funktion $h : U \to \mathbb{C}$, sodaß $f(z) = (h(z))^n$ für alle $z \in U$.*

(Hinweis: $|f(z) - f(z_0)| < |f(z_0)|$ in einer geeignet gewählten Umgebung von z_0.)

Aufgabe 30: *Zeige: Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $n \cdot \log_0\left(1 + \frac{z}{n}\right)$* definiert *für genügend großes $n \in \mathbb{N}$ und strebt gegen z für $n \to \infty$. Folgere:*

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \mathbb{e}^z.$$

Aufgabe 31: *Zeige:* tan (z) *ist* bijektiv *als Funktion*

$$\left\{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < \Re(z) \leqslant \frac{\pi}{2}\right\} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \to \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{i}, -\mathbb{i}\}.$$

Aufgabe 32 (Laplace–Transformation)**:** *Sei* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige reelle Funktion. Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *sei*

$$F(z) \overset{\text{def}}{=} \int_a^b \mathbb{e}^{-z\cdot t} \cdot f(t)\ dt.$$

(F heißt die Laplace–Transformierte *von f.) Zeige:*

$$F'(z) = -\int_a^b t \cdot \mathbb{e}^{-z\cdot t} \cdot f(t)\ dt \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Aufgabe 33: *Sei* $f : \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \to \mathbb{R}$ *eine stetige reelle Funktion. Zeige: Dann gibt es ein* z *mit* $f(-z) = f(z)$.

Aufgabe 34: *Zeige, daß die Reihe*

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1} \cdot z^n}{n}$$

auch für $|z| = 1$, $z \neq -1$ *konvergiert. Folgere:*

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \sin(n \cdot t) = \frac{t}{2} \text{ für } -\pi < t < \pi.$$

Hinweis: Setze $s_0 \overset{\text{def}}{=} 0$ *und* $s_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} z^k$ *für* $n \in \mathbb{N}$. *Schreibe die Partialsummen der Reihe als* $\sum_{k=1}^{n} \frac{s_k - s_{k-1}}{k}$ *und verwende für die Folgerung den Abelschen Grenzwertsatz.*

Aufgabe 35: *Sei* B *eine* beschränkte *Teilmenge von* $\mathbb{C}$. *Zeige:* exp *bildet* $\mathbb{C} \setminus B$ *surjektiv auf* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *ab.*

Bestimme eine ("mehrwertige") Umkehrfunktion des cos *und folgere:* cos *bildet* $\mathbb{C} \setminus B$ *surjektiv auf ganz* $\mathbb{C}$ *ab.*

1.8. Kurvenintegrale

Aufgabe 36: *Bestimme die Kurvenintegrale von* $z \cdot (z-1)$ *und* $\Re(z)$ *über die gerichteten Geradenstücke* $[0 \to 1 + \mathbb{i}]$, $[0 \to 1]$ *und* $[1 \to 1 + \mathbb{i}]$.

Aufgabe 37: *Sei* $f(x + \mathbb{i} \cdot y) = x \cdot y$. *Berechne das Kurvenintegral von* f *über den Halbkreis* $t \mapsto \mathbb{e}^{\mathbb{i}\cdot t}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

Aufgabe 38: *Berechne das Integral von* $\frac{1}{z}$ *über das Quadrat mit den Eckpunkten* $\pm 1 \pm \mathbb{i}$ *im Gegenuhrzeigersinn, also über die Verknüpfung der gerichteten Geradenstücke*

$$[1 - \mathbb{i} \to 1 + \mathbb{i}] \cup [1 + \mathbb{i} \to -1 + \mathbb{i}] \cup [-1 + \mathbb{i} \to -1 - \mathbb{i}] \cup [-1 - \mathbb{i} \to 1 - \mathbb{i}].$$

(Hinweis: Kombiniere die Teilintegrale für gegenüberliegende Seiten!)

Aufgabe 39: *Sei* $f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n \cdot z^n$ *für* $|z| < R$, $R > 0$. *Zeige: Für* $0 < r < R$ *und* $n \in \mathbb{N}$ *gibt es ein* z *mit* $|z| = r$ *und*

$$\left| \int_{[0 \to z]} f \right| \geqslant \frac{1}{n} |a_{n-1}| \cdot r^n.$$

Aufgabe 40: *Zeige durch Zerlegung des Intervalls* $[0, 2\pi]$ *an den Punkten* $\frac{2\pi \cdot r}{n}$, $r = 0, 1, \ldots, n-1$*)* direkt, *daß das Integral von* $\frac{1}{z}$ *über den Einheitskreis* $2\pi \cdot \mathbb{i}$ *ergibt.*

(Hinweis: Verwende Übungsaufgabe Aufgabe 25.)

Aufgabe 41: *Zeige: Für jede geschlossene Kurve ϕ ist das Kurvenintegral $\int_\phi \overline{z}$ rein imaginär.*

Aufgabe 42: *Wenn $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine* gerade *Funktion ist (also $f(-z) = f(z)$), dann ist*

$$\int_{C(0,r)} f = 0 \text{ für alle } r > 0.$$

KAPITEL 2

Komplex differenzierbare Funktionen

2.1. Cauchyscher Integralsatz und Integralformel

Aufgabe 43: *Sei* $f(x + \mathbb{i} \cdot y) = x + y$*, und für* $z \in \mathbb{C}$ *sei* $F(z) = \int_{[0 \to z]} f$*. Bestimme die Menge der Punkte, bei denen* F *differenzierbar ist.*

Aufgabe 44: *Sei* ϕ *eine geschlossene Kurve in* $\mathbb{C}$*, sei* $f : G \to \mathbb{C}$ *holomorph auf einem Gebiet* G *mit* $\phi^\star \subset G$*. Zeige: Wenn* $\{f(z) : z \in \phi^\star\}$ *keinen nicht–positiven reellen Punkt (also keinen Punkt aus* $\{x \in \mathbb{R} : x \leqslant 0\}$*) enthält, dann gilt*

$$\int_\phi \frac{f'}{f} = 0.$$

Aufgabe 45: *Berechne*

$$\int_{C(0,1)} \frac{1}{(z-a)(z-b)}\, dz$$

für

(1) $|a|, |b| < 1$,
(2) $|a| < 1 < |b|$,
(3) $1 < |a|, |b|$.

(Hinweis: Beginne mit (2) und argumentiere nur mit geeignet gewählten Integrationskurven.)

Aufgabe 46: *Berechne*

$$\int_{C(0,2)} \frac{\mathbb{e}^z}{z-1}\, dz \text{ und } \int_{C(0,2)} \frac{\mathbb{e}^z}{\pi\mathbb{i} - 2z}\, dz.$$

Aufgabe 47: *Sei* $\omega_n = \exp\left(\frac{2\pi\mathbb{i}}{n}\right)$*. Zeige: Für alle* k *ist der Normalabstand von* 0 *zur Geraden durch die Punkte* ω_n^{k-1} *und* ω_n^k *gleich* $\frac{\Im(\omega_n)}{|1-\omega_n|}$*. Zeige: Dieser Normalabstand geht gegen* 1 *für* $n \to \infty$*. Folgere: Die Voraussetzung* $r_1 < \rho_1$ *(statt* $r_1 < \frac{\rho_1}{2}$*) ist hinreichend für die Aussage im Satz betreffend die Gleichheit von Kurvenintegralen über Kreise, wo der eine innerhalb des anderen liegt (siehe Skriptum).*

(Hinweis: Konstruiere eine hinreichend große Anzahl von geschlossenen Kurven $\sigma_1, \ldots \sigma_n$*; statt nur* 4 *wie im Beweis des Satzes.)*

2.2. Die Taylorreihe

Aufgabe 48: *Bestimme die Taylorreihe für* sin *und* cos *um den Punkt* $\frac{\pi}{4}$ *auf zwei Arten:*

(1) *Unter Benutzung der Additionsformeln (Summensätze) für* sin *und* cos

$$\cos(\varphi + \psi) = \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi)$$
$$\sin(\varphi + \psi) = \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) + \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi)$$

(2) *Durch Differenzieren.*

Aufgabe 49: *Zeige: Die Taylorreihe um* 0

$$\frac{1}{1-z+z^2} = \sum_{n\geqslant 0} a_n \cdot z^n$$

hat Koeffizienten, die rekursiv wie folgt gegeben sind:

$$a_0 = a_1 = 1,\ a_2 = 0 \ \text{ und } a_{n+3} = -a_n \ \text{ für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Bestimme den Konvergenzradius dieser Reihe.

Aufgabe 50: *Berechne* $\int_{C(\mathrm{i},2)} \frac{\mathrm{e}^z}{(z-1)^n}\, dz$ *für* $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 51: *Bestimme die Ordnung der Nullstelle bei* 1 *für die folgenden Funktionen:*

(1) $\mathrm{e}^{z-1} - 1$,
(2) $(z-1) \cdot \sin(z-1)$,
(3) $z^5 - 3z^4 + 8z^2 - 9z + 3$.

Aufgabe 52: *Zeige, daß das Korollar zur Differenzierbarkeit des Differentialquotienten für* reelle *Funktionen im allgemeinen* nicht *stimmt.*

(Hinweis: Betrachte die Funktion $x \mapsto x \cdot |x|$*.)*

Aufgabe 53: *Seien* $f, g : G \to \mathbb{C}$ *holomorph auf einem Gebiet* G*, und sei* $f(z) \cdot g(z) = 0$ *für alle* $z \in G$*. Zeige: Dann ist* f *oder* g *identisch* 0 *auf* G*.*

Aufgabe 54: *Sei* $G \subseteq \mathbb{C}$ *ein Gebiet, das unter der Spiegelung an der reellen Achse invariant ist (also* $z \in G \iff \overline{z} \in G$*). Zeige: Wenn* $f : G \to \mathbb{C}$ *holomorph ist, dann ist auch*

$$g(z) = \overline{f(\overline{z})}$$

holomorph auf G*. Folgere: Wenn* f *auf* $\mathbb{R} \cap G$ *nur* reelle *Werte annimmt, dann gilt*

$$f(\overline{z}) = \overline{f(z)} \ \text{ für alle } z \in G.$$

Aufgabe 55: *Sei* f *eine nicht–konstante ganze Funktion. Zeige: Für alle* $\lambda \in \mathbb{C}$ *ist die Menge* $\{z : f(z) = \lambda\}$ *endlich oder abzählbar. Folgere:* $f(\mathbb{C})$ *ist überabzählbar.*

Aufgabe 56: *Sei* $f : G \to \mathbb{C}$ *holomorph auf einer offenen Menge* G*, mit einer* endlichen *Menge von Nullstellen in* G*. Zeige:* f *kann in der Form* $f = p \cdot g$ *geschrieben werden, wobei* p *ein Polynom und* $g : G \to \mathbb{C}$ *holomorph ohne Nullstelle in* G *ist.*

2.3. Ganze Funktionen und Polynome

Aufgabe 57: *Gib ein Beispiel für eine* ganze *Funktion, die* kein Polynom *ist, und*

(1) *keine Nullstelle hat,*
(2) *genau eine Nullstelle hat,*
(3) *unendlich viele Nullstellen hat.*

Aufgabe 58: *Sei* f *eine ganze Funktion mit* $f'(z) = f(z)$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$*. Zeige:* f *ist gleich* $k \cdot \exp$ *für eine Konstante* k*.*

Aufgabe 59: *Zeige auf zwei Arten, nämlich*

(1) *direkt mit dem Zwischenwertsatz,*
(2) *unter Verwendung der Resultate aus dem Abschnitt über ganze Funktionen im Skriptum,*

daß jedes reelle Polynom ungeraden Grades eine reelle Nullstelle hat.

Aufgabe 60: *Sei p ein nicht–konstantes Polynom. Zeige: Für alle $\alpha > 0$ gibt es ein $\beta > 0$ sodaß*

$$\{z : |z| > \beta\} \subseteq \{p(z) : |z| > \alpha\}.$$

Aufgabe 61: *Zeige* nur *mit*

$$\frac{p(z)}{a_n \cdot z^n} \to 1 \text{ für } z \to \infty, \text{ wobei } p(z) = a_n \cdot z^n + \cdots + a_0 \text{ ein Polynom mit } a_n \neq 0,$$

und einem Kompaktheitsargument: Es gibt einen Punkt z_0 sodaß

$$|p(z_0)| = \inf\{|p(z)| : z \in \mathbb{C}\}.$$

(D.h., verwende nicht *den Fundamentalsatz der Algebra.)*

Aufgabe 62: *Sei f eine ganze Funktion, für die es ein $a \in \mathbb{C}$ und ein $\epsilon > 0$ gibt, sodaß*

$$|f(z) - a| > \epsilon \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Zeige: Ein solches f muß konstant sein. Folgere: Für jede nicht–konstante ganze Funktion ist $f(\mathbb{C})$ dicht *in $\mathbb{C}$.*

2.4. Der Betrag einer holomorphen Funktion

Aufgabe 63: *Sei f eine ganze Funktion ohne Nullstellen. Für $r > 0$ setze*

$$m(r) = \inf\{|f(z)| : |z| = r\}.$$

Zeige: m ist eine nicht–steigende Funktion.

Aufgabe 64: *Sei $f : D(a,1) \to \mathbb{C}$ holomorph mit $|f(z) - f(a)| \leqslant k$ für alle $z \in D(a,1)$. Zeige:*

$$|f(z) - f(a)| \leqslant k \cdot |z - a| \text{ für alle } z \in D(a,1).$$

Aufgabe 65: *Sei $f : D(0,1) \to D(0,1)$ holomorph mit $f(a) = 0$ für ein $a \in D(0,1)$. Definiere*

$$g_a : D(0,1) \to \mathbb{C},\ g_a(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{z - a}{1 - \overline{a} \cdot z}.$$

Zeige:

$$|f(z)| \leqslant |g_a(z)| \text{ für alle } z \in D(0,1).$$

Aufgabe 66: *Sei $V \stackrel{\text{def}}{=} \{z : \Im(z) > 0\}$ die obere Halbebene. Für $a \in V$ definiere*

$$h_a(z) = \frac{z - a}{z - \overline{a}} \text{ für } z \neq \overline{a}.$$

Zeige: h_a ist eine konforme *Abbildung $V \to D(0,1)$. Folgere:*

(1) *Sei $f : D(0,1) \to V$* holomorph *mit $f(0) = a$, dann gilt*

$$|f(z)| \leqslant |a| \cdot \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \text{ für alle } z \in D(0,1).$$

(2) *Sei $f : D(0,1) \to V$* konform *mit $f(0) = a$, dann gibt es eine Zahl c vom Betrag 1 sodaß*

$$f(z) = \frac{a \cdot c - \overline{a} \cdot z}{c - z} \text{ für alle } z \in D(0,1).$$

(Hinweis: Betrachte die Funktion $h_a \circ f$.)

Betrachte die Funktion $f \circ h_a^{-1}$ und bestimme einen allgemeinen Ausdruck für konforme Abbildungen $f : V \to V$.

Aufgabe 67: *Zeige: Sei p ein nicht–konstantes Polynom mit $|p(z_0)| > 0$, dann ist z_0* kein *lokales Minimum von $|p|$.*
Hinweis: Schreibe $p(z) = a_0 + (z - z_0)^m \cdot (a_m + q(z))$, mit $a_0, a_m \neq 0$ und $q(z) \to 0$ für $z \to z_0$. Schreibe $a_0 = r \cdot e^{i\alpha}$ und $a_m = s \cdot e^{i\beta}$ und setze

$$z_\rho = z_0 + \rho \cdot e^{i\frac{\alpha-\beta+\pi}{m}}.$$

Für $\rho > 0$ genügend klein ist $\left|q\left(z_\rho\right)\right| \leqslant \frac{s}{2}$ und somit

$$\left|p\left(z_\rho\right)\right| \leqslant r - \frac{1}{2} \cdot \rho^m \cdot s < r.$$

Folgere nun mit Aufgabe 61: Jedes nicht–konstante Polynom hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

2.5. Singularitäten und Laurentreihen

Aufgabe 68: *Zeige: Wenn eine Potenzreihe $\sum_{n\geqslant 0} f_n \cdot z^n$ den Konvergenzradius $0 < R < \infty$ hat, dann hat die Summenfunktion $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} f_n \cdot z^n$, die durch diese Potenzreihe im Konvergenzkreis gegeben ist, am Rand des Konvergenzkreises mindestens einen* singulären Punkt *w.*
(Hinweis: Der Rand des Konvergenzkreises ist kompakt!)

Aufgabe 69: *Sei*

$$f(z) = \frac{1}{z \cdot \left(z^2 + 1\right)}.$$

Bestimme die Laurentreihe von f auf $\dot{D}(0,1)$ und $\{z : |z| > 1\}$.

Aufgabe 70: *Sei* $\operatorname{ord}(f, z_0) = n$, $z_0 \neq 0$. *Setze $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$. Zeige:*

$$\operatorname{ord}\left(g, \frac{1}{z_0}\right) = n.$$

Aufgabe 71: *Bestimme alle Singularitäten der folgenden Funktionen und gib für alle Pole die jeweiligen Ordnungen an:*

$$\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^2+1}, \ \frac{z}{\sin(z)}, \ e^{z+\frac{1}{z}}, \ \frac{1}{e^{z^2} - 1}.$$

Aufgabe 72: *Zeige: Wenn f bei z_0 eine wesentliche Singularität hat, dann auch f^2. Zeige weiters: Wenn diese Funktion f in einer Umgebung von z_0 den Wert 0 nicht annimmt, dann hat auch $\frac{1}{f}$ eine wesentliche Singularität bei z_0.*

Aufgabe 73: *Sei f holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ mit Ausnahme von Singularitäten. Zeige: In jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist die Anzahl der Singularitäten von f* endlich. *Folgere: Die Menge aller Singularitäten von f ist endlich oder abzählbar.*

Aufgabe 74: *Sei f eine ganze Funktion, und es gebe $k, R > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ sodaß*

$$|f(z)| \geqslant k \cdot |z|^n \text{ für } |z| > R.$$

Zeige: f ist ein Polynom. Was kann man über den Grad des Polynoms f sagen?

Aufgabe 75: *Zeige: Wenn f bei z_0 eine wesentliche Singularität hat, dann gibt es für alle $r > 0$ einen Punkt $z \in \dot{D}(z_0, r)$ mit $f(z) \in \mathbb{R}$.*

Aufgabe 76: *Sei f holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ mit Ausnahme einer endlichen Menge von Singularitäten, und es gelte*

$$z \cdot f(z) \to 0 \text{ für } z \to \infty.$$

Zeige: Es gibt ein $R > 0$, sodaß $\left\{z^2 \cdot f(z) : |z| > R\right\}$ beschränkt ist.

Aufgabe 77: *Angenommen,* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n = B$, *und* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |b_n|$ *sind beide konvergent.*

Zeige: Für alle $n \in \mathbb{Z}$ *ist* $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot b_{n-k}$ *konvergent; und wenn wir dieses verallgemeinerte Konvolutionsprodukt mit* c_n *bezeichnen, dann gilt*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot b_{n-k} = A \cdot B.$$

(Hinweis: Betrachte die Partialsummen $A_m = a_{-m} + \cdots a_m$, $B_m = b_{-m} + \cdots b_m$ *und zeige, daß für* $k, l > 2m$ *die Summe* $c_{-k} + \cdots + c_l$ *nahe bei* $A_m \cdot B_m$ *liegt.)*

Folgere: Die Laurentreihe eines Produkts von Funktionen $f \cdot g$ *erhält man durch "formales Ausmultiplizieren" des Produkts der Laurentreihen von* f *und* g *(und präzisiere diese saloppe Aussage angemessen).*

Betrachte die Laurentreihe von $\mathbb{e}^{z+\frac{1}{z}}$ *um* 0 *und folgere:*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbb{e}^{2\cos(t)} \cdot \cos(n \cdot t)\ dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,(k+n)!} \text{ für } n \in \mathbb{N}_0.$$

2.6. Der Residuensatz

Aufgabe 78: *Zeige:*

$$\int_{C(0,2)} \frac{\mathbb{e}^{a \cdot z}}{1+z^2}\, dz = 2\pi\mathbb{i} \cdot \sin(a)\,.$$

Aufgabe 79: *Zeige: Wenn* $\operatorname{ord}(f, z_0) = k > 0$ *und* $\operatorname{ord}(g, z_0) = k+1$, *dann gilt*

$$Res\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = (k+1) \cdot \frac{f^{(k)}(z_0)}{g^{(k+1)}(z_0)}.$$

Aufgabe 80: *Bestimme die Residuen*

(1) *von* $\frac{\mathbb{e}^{\mathbb{i} \cdot z}}{z^3+z}$ *bei* $\mathbb{i}$ *und bei* 0,
(2) *von* $\frac{1}{1-\cos(z)}$ *bei* 0,
(3) *von* $\frac{1}{(z-1)^2(z+1)}$ *bei* 1,
(4) *von* $\frac{1}{z-\sin(z)}$ *bei* 0.

Aufgabe 81: *Zeige durch ein Beispiel, daß die Aussage*

$$Res(f \cdot g, z_0) = g(z_0) \cdot Res(f, z_0) \text{ falls } \operatorname{ord}(g, z_0) = 0$$

nicht richtig ist, wenn f *einen Pol höherer Ordnung als* 1 *hat.*

Aufgabe 82: *Sei* f *holomorph auf* $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$ *mit Laurentreihenentwicklung*

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \cdot z^n \text{ auf } \{z : |z| > R\}\,,$$

wobei $R = \max\{|z_1|, \ldots, |z_n|\}$.

Zeige:

$$a_{-1} = \sum_{j=1}^{n} Res(f, z_j)\,.$$

2.7. Logarithmische Ableitung und lokales Abbildungsverhalten

Aufgabe 83: *Sei ϕ eine geschlossene Kurve in einem sternförmigen Gebiet G. Sei $f : G \to \mathbb{C}$ meromorph mit endlich vielen Polen, und sei $\{z \in G : \operatorname{ord}(f,z) \neq 0\}$ (das ist also die Menge der* Pole und Nullstellen *von f in G) eine* endliche *Menge $\{z_1, \ldots, z_n\}$, die* disjunkt *zu $\phi^\star$ ist (d.h., die Kurve ϕ geht durch keinen Pol und keine Nullstelle von f). Sei $g : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeige:*

$$\int_\phi \frac{f' \cdot g}{f} = 2\pi\mathbb{i} \sum_{j=1}^{n} g(z_j) \cdot \operatorname{ord}(f, z_j) \cdot w(\phi, z_j).$$

Aufgabe 84: *Sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant auf der offenen Menge G, und sei $H \subseteq G$ eine offene Teilmenge von G. Zeige: Dann ist $f(H)$ offen.*

Aufgabe 85: *Zeige durch ein Beispiel, daß der Satz von Hurwitz für* reelle *Funktionen falsch ist.*

Aufgabe 86: *Zeige: Es gibt genau* drei *verschiedene Werte z sodaß*

$$\frac{5}{2} < |z| < 3 \text{ und } z^4 + 26z + 2 = 0.$$

Aufgabe 87: *Betrachte die Beträge von $\cos(z)$ und $\frac{1}{z}$ auf den Seiten eines Rechtecks mit den Eckpunkten $\pm\pi \pm \mathbb{i} \cdot R$ für alle genügend großen $R > 0$:*

(1) *Wieviele Nullstellen von $\cos(z) - \frac{1}{z}$, gezählt mit ihren Ordnungen, liegen im vertikalen Streifen $\{z : -\pi < \Re(z) < \pi\}$?*
(2) *Wieviele dieser Nullstellen sind reell?*

Zeige: Die nicht–reellen Nullstellen sind alle einfach. (Hinweis: Betrachte die Konjugierten!)

Aufgabe 88: *Sei f auf ganz $\mathbb{C}$ mit Ausnahme von isolierten Singularitäten holomorph und* injektiv. *Zeige:*

(1) *f hat keine wesentlichen Singularitäten,*
(2) *f hat höchstens einen Pol,*
(3) *Wenn f einen Pol z_0 hat, dann hat die Laurentreihe um z_0 nur endlich viele Koeffizienten ungleich 0,*
(4) *Wenn f keine ganze Funktion ist, dann ist f von der Form*

$$f(z) = \frac{a \cdot z + b}{z - z_0}.$$

KAPITEL 3

Anwendungen des Residuensatzes

3.1. Reelle Integrale

Aufgabe 89: *Zeige:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Aufgabe 90: *Zeige:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi \cdot x)}{x^2-2x+2}\, dx = -\frac{\pi}{\mathrm{e}^{\pi}}.$$

und:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi \cdot x)}{x^2-2x+2}\, dx = 0.$$

Aufgabe 91: *Zeige:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}\, dx = \frac{\pi}{3}.$$

Aufgabe 92: *Zeige:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Aufgabe 93: *Zeige:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \cdot \sin(x)}{\left(1+x^2\right)^2}\, dx = \frac{\pi}{2\mathrm{e}}.$$

Aufgabe 94: *Zeige:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-a^2}{x^2+a^2} \cdot \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \pi\left(2\mathrm{e}^{-a}-1\right) \text{ für } a > 0.$$

Aufgabe 95: *Zeige:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(a \cdot x) - \cos(b \cdot x)}{x^2}\, dx = \pi \cdot (b-a) \text{ für } a, b \geqslant 0.$$

Folgere:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 dx = \pi.$$

Aufgabe 96: *Zeige:*

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{\cos(x)}{a+\cos(x)}\, dx = 2\pi \cdot \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\right) \text{ für } a > 1.$$

Aufgabe 97: *Zeige:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(x+\mathrm{i}\cdot a)^2}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \text{ für } a \in \mathbb{R}.$$

(Hinweis: Betrachte ein Kurvenintegral über ein passend gewähltes Rechteck.)
Folgere unter Verwendung der Tatsache, daß das Integral auf der rechten Seite der Gleichung $\sqrt{\pi}$ *ergibt:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \cdot \cos(2a \cdot x)\ dx = \mathrm{e}^{-a^2}\sqrt{\pi} \text{ für } a \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 98: *Verwende für* $a, R > 0$ *die Ableitung*

$$\left(\frac{\log\left(\frac{a+1}{a+\mathrm{e}^{R\cdot z}}\right) + R \cdot z}{a}\right)' = \frac{R}{a + \mathrm{e}^{R\cdot z}}$$

und zeige:

$$\int_0^{\pi} \frac{x \cdot \sin(x)}{1 - 2a \cdot \cos(x) + a^2}\ dx = \frac{\pi}{a} \cdot \log(1+a) \text{ für } 0 < a < 1.$$

Hinweis: Betrachte das Integral von $f(z) \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{i}\cdot z}{a - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot z}}$ *um das Rechteck mit den Eckpunkten* $\pm\pi$ *und* $\pm\pi + \mathrm{i} \cdot R$ *für* $R \to \infty$. *(In diesem Rechteck hat* f *keinen Pol!)*

Aufgabe 99: *Zeige:*

$$\lim_{\delta \to 0^+} \int_{\delta}^{\infty} \frac{\log(x)}{1+x^2}\ dx = 0 \text{ und } \lim_{\delta \to 0^+} \int_{\delta}^{\infty} \frac{\log(x)}{(1+x^2)^2}\ dx = -\frac{\pi}{4}.$$

(Die Notation $\delta \to 0^+$ *soll bedeuten, daß der* rechtsseitige *Limes betrachtet wird, also* $\delta > 0$.*)*
(Hinweis: Integriere eine passende komplexe Funktion über einen Halbkreis mit einer Ausnehmung um 0.*)*

3.2. Summation

Aufgabe 100: *Zeige:*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(3n+1)} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Aufgabe 101: *Zeige:*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{\pi}{\sinh(\pi)}.$$

Aufgabe 102: *Zeige:*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^2} = \left(\frac{\pi}{\sin(\pi \cdot a)}\right)^2 \text{ für } a \notin \mathbb{Z}.$$

Aufgabe 103: *Berechne:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

und überprüfe das Resultat anhand

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Aufgabe 104: *Berechne:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)} + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$$

und überprüfe das Resultat durch Zusammenfassung der Terme für n *und* $-n$.

Aufgabe 105: *Die Summationsmethode aus der Proposition in der Vorlesung scheint die offenbar falsche Aussage*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-n^2} = 0$$

zu liefern: Erkläre diesen vermeintlichen Widerspruch!

3.3. Partialbruchzerlegung

Aufgabe 106: *Bestimme die Partialbruchzerlegung für*

$$\frac{(z+1)^2}{(z-1)(z+2)(z+4)} \text{ und für } \frac{(z-2)(2z+1)(3z+1)}{z\left(z^2-1\right)}.$$

Aufgabe 107: *Zeige: Für $z \notin \mathbb{Z}$ gilt*

$$\frac{\pi}{\sin(\pi \cdot z)} = \frac{1}{z} + 2 \cdot z \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 - n^2}$$

Aufgabe 108: *Zeige:*

$$\frac{1}{\mathrm{e}^z - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + 2 \cdot z \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 + 4 \cdot n^2 \cdot \pi^2}.$$