Errata zum Skriptum “Komplexe Analysis”
Version 0.95 vom 30. September 2019

Markus Fulmek

Bei der Erstellung meines Skriptums Komplexe Analysis haben sich einige Tippfehler eingeschlichen (vielen Dank an die Studierenden in meiner Vorlesung im Wintersemester 2019/20, die mich auf viele derartige Fehler aufmerksam gemacht haben): In der Folge fasse ich die bisher erkannten Fehler zusammen (ich bleibe aber bei der "alten Rechtschreibung").

Seite 3 [Mitte] sollte richtig lauten (Definition abgeschlossene Kugel):

$$\overline{B(a,r)} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X : d(x,a) \leqslant r\}$$

Seite 8 [oben] sollte richtig lauten (Definition komplexe Multiplikation):

$$(a \cdot \mathbf{1} + b \cdot \mathbb{i}) \cdot (c \cdot \mathbf{1} + d \cdot \mathbb{i}) \stackrel{\text{def}}{=} a \cdot c + \mathbb{i}^2 \cdot b \cdot d + b \cdot c \cdot \mathbb{i} + a \cdot d \cdot \mathbb{i}$$

Seite 10 [Mitte] sollte richtig lauten:

... Die Polynomgleichung $z^n = 1$ ...

Seite 15 [Anfang Beweis 1.3.4.] sollte richtig lauten (Summand a_k fehlte):

Sei $A_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, $B_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^n b_k = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$

Seite 15 [unten] sollte richtig lauten (Summationsindizes falsch):

$$C_n = \sum_{i+j \leqslant n} a_i \cdot b_j$$

Seite 20 [Mitte] sollte richtig lauten ($X \to A$):

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt *konvex*, wenn für alle $a, b \in A$ auch $[a : b] \subseteq A$ gilt ...

Seite 23 [Proposition 1.5.2] sollte richtig lauten:

Sei $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, und sei $\Phi(t) = \int_a^t \varphi$ für $0 \leqslant t \leqslant b - a$. Dann gilt $\Phi'(t) = \varphi(t)$ für $0 \leqslant t \leqslant b - a$.

Seite 25 [Beweis für Proposition 1.5.7] sollte richtig lauten:

Sei $x \in A$: Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, sodaß $B(x, \epsilon) \subseteq G$. Für jedes $y \in B(x, \epsilon)$ ist aber auch $[x : y] \subseteq B(x, \epsilon)$... Dann gibt es wieder ein $\epsilon > 0$, sodaß $B(x, \epsilon) \subseteq G$ ...

Seite 27 [Aufgabe 15] sollte richtig lauten:

Zeige für zwei rektifizierbare (nicht notwendigerweise glatte!) Wege φ, ψ: $L(\varphi \cup \psi) = L(\varphi) + L(\psi)$.

Seite 28 [Proposition 1.6.3] sollte richtig lauten ($g' \to f'$):

... mit Ableitung $g'(f(a)) \cdot f'(a)$

Seite 32 [oben und unten] sollte richtig lauten (Jacobi–Matrix; zwei Mal):

$$\begin{bmatrix} u_{1,0}(a,b) & u_{0,1}(a,b) \\ v_{1,0}(a,b) & v_{0,1}(a,b) \end{bmatrix}.$$

Seite 34 [oben] sollte richtig lauten (Exponent von b falsch):

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}\right)\cdot\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{b^m}{m!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot a^k\cdot b^{n-k}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+b)^n}{n!}\right)$$

Seite 36 [Gleichung (1.23)] sollte richtig lauten:

$$\mathbb{e}^{\mathbb{i}\pi}+1=0.$$

Seite 40 [unten] sollte richtig lauten (Definitionsbereiche vertauscht):

$$\tan:\mathbb{C}\backslash\left(\frac{\pi}{2}+\pi\cdot\mathbb{Z}\right)\to\mathbb{C},\quad z\mapsto\frac{\sin(z)}{\cos(z)},$$
$$\cot:\mathbb{C}\backslash(\pi\cdot\mathbb{Z})\to\mathbb{C},\quad z\mapsto\frac{\cos(z)}{\sin(z)}.$$

Seite 42 [Lemma 1.7.10] sollte richtig lauten ($a\to\alpha$):

... in bezug auf $\mathbb{e}^{\mathbb{i}\cdot\alpha}$

Seite 44 [unten] sollte richtig lauten:

...sind *stetig* auf $\mathbb{C}\backslash H_\alpha$ ...

Seite 45 [unten] sollte richtig lauten ($(-z^n)\to(-z)^n$):

$$g'(z)=\sum_{n\geqslant 0}(-z)^n=\tfrac{1}{1+z}.$$

Seite 47 [Mitte] sollte richtig lauten:

Durch Substitution $t=\tan u$ mit $dt=\left(1+\tan(u)^2\right)\cdot du\ldots$

Seite 47 [unten] sollte richtig lauten ($r_n(t)\to r_n(x)$):

$$\arctan(x)=\int_0^x s_n(t)\,dt+r_n(x)$$

Seite 50 [unten] sollte richtig lauten (Integralgrenzen inkonsistent):

$$\left|\int_\varphi f\cdot d\varphi\right|=\left|\int_a^b f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt\right|\leqslant\int_a^b|f(\varphi(t))|\cdot|\varphi'(t)|dt\leqslant s\cdot\underbrace{\int_a^b|\varphi'(t)|dt}_{=L(\varphi)}.$$

Seite 52 [Mitte] sollte richtig lauten:

gemäß Proposition 1.5.3 (statt 1.5.2)

Seite 53 [oben] sollte richtig lauten (dt fehlt):

$$\int_\psi f=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathbb{i}\cdot\mathbb{e}^{\mathbb{i}\cdot t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\mathbb{e}^{\mathbb{i}\cdot t}\right)'dt=\left(\mathbb{e}^{\mathbb{i}\cdot\frac{\pi}{2}}-\mathbb{e}^0\right)=\mathbb{i}-1.$$

Seite 54 [unten] sollte richtig lauten ($|z|\to|z-z_0|$):

$$\left|\frac{f(z)-\sum_{k=0}^N a_k\cdot(z-z_0)^k}{(z-z_0)^{n+1}}\right|\leqslant\frac{\epsilon}{r^{n+1}}\text{ für }|z-z_0|=r.$$

Seite 57 [oben] sollte richtig lauten ($x \to t$):

$$\ldots \text{definieren wir einfach } G(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^x g(t)\, dt \ldots$$

Seite 57 [unten] sollte richtig lauten ($z \to \zeta$):

$$F(z) - F(z_0) = \int_{[z_0 \to z]} f = \int_{[z_0 \to z]} (f(z_0) + g(\zeta))\, d\zeta$$

Seite 58 [unten Satz 2.1.3] sollte richtig lauten ($\in \to \subseteq$):

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet ...

Seite 60 [oben] sollte richtig lauten (Betragsstriche fehlen):

$$|I(T_{n,i})| \geqslant \left|\frac{I(T_n)}{4}\right|,$$

Seite 60 [oben] sollte richtig lauten (Betragsstriche fehlen):

$$|I(T_n)| \geqslant \left|\frac{I(T)}{4^n}\right| \text{ (denn } T_0 = T\text{)}$$

Seite 60 [unten] sollte richtig lauten ($(f(z_0) - (z - z_0) \ldots) \to (f(z_0) + (z - z_0) \ldots)$):

$$\int_{\partial T_n} (f(z_0) + (z - z_0) \cdot f'(z_0))\, dz = 0.$$

Seite 62 [unten] sollte richtig lauten (Subskript falsch):

...

$$f : \dot{D}(z_2, r) = D(z_2, r) \setminus \{z_2\} \to \mathbb{C}$$

holomorph ist; also nur im Mittelpunkt z_2, ...

Seite 67 [oben] sollte richtig lauten ($z_0 \to 0$):

... um den Mittelpunkt 0 ...

Seite 63 [Satz 2.1.9 und Beweis] sollte richtig lauten (im Nenner des Integranden vier Mal z und ζ vertauscht):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

...

$$F : D(z_0, r) \setminus \{z\} \to \mathbb{C}, \; F(\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

...

$$\cdots = \int_{C(z,\delta)} F = f(z) \underbrace{\int_{C(z,\delta)} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta}_{2 \cdot \pi \cdot i} + \cdots$$

...

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}.$$

Seite 67 [Mitte] sollte richtig lauten (Exponent falsch):

$$\tan(z) = a_1 \cdot z + a_3 \cdot z^3 + a_5 \cdot z^5 + \cdots$$

Seite 70 [oben] sollte richtig lauten ($z \to z_0$):

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(p)}(z_0)}{g^{(p)}(z_0)}.$$

Seite 70 [Satz von Morera] sollte richtig lauten ($g \to G$):

... und sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, sodaß ...

Seite 70 [Beweis Morera] sollte richtig lauten:

Lemma 2.1.2 (statt Satz 2.1.1)

Seite 72 [Beweis Korollar 2.2.17] sollte richtig lauten ("endlich" fehlt):

Da A *kompakt* ist, gibt es eine endliche *Teilüberdeckung*:...

Seite 73 [Mitte] sollte richtig lauten ($f \to f'$):

Daher konvergiert f_n' auf $\overline{D(a,r)}$ gleichmäßig gegen f' ...sodaß f_n' auf $D(a, r_a)$ gleichmäßig gegen f' konvergiert.

Seite 77 [Maximumprinzip] sollte richtig lauten (Betragsstriche fehlen):

Dann nimmt $|f|$ das Supremum $\sup\{|f(a)| : a \in A\}$ in einem *Randpunkt* von A an.

Seite 77 [Beweis Lemma von Schwarz] sollte richtig lauten (nicht falsch, aber so besser verständlich):

...*für alle* r mit $|z| \leqslant r < 1$: Im Limes $r \to 1$ folgt also $|g(z)| \leqslant 1$.

Seite 81 [Lemma 2.5.5] sollte richtig lauten:

KEIN Fehler (war nur in der Vorlesung verwirrt;-)

Seite 82 [unten] sollte richtig lauten ($|a_n| \to |a_{-n}|$):

$$\left|a_{-n} \cdot (z - z_0)^{-n}\right| = |a_{-n}| \cdot |s|^{-n} \leqslant M(r) \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^n$$

Seite 82 [In Satz 2.5.6] sollte richtig lauten ($z \to z_0$):

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathbb{i}} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Seite 83 [oben] sollte richtig lauten ($z \to z_0$):

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi \mathbb{i}} \int_{C_2} f(\zeta) \cdot (\zeta - z_0)^{n-1}\, d\zeta \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Seite 83 [Mitte] sollte richtig lauten ($z \to z_0$):

$$b_n = \frac{1}{2\pi \mathbb{i}} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Seite 88 [Korollar 2.5.17] sollte richtig lauten (nicht falsch, aber so besser verständlich):

...und $\epsilon, \delta > 0$ eine komplexe Zahl z mit $|z| > \delta$ ...

Seite 90 [unten] sollte richtig lauten ($2\pi\mathbb{i} \to 1$, $z_0 \to z$):

$$w(C(a,r), z) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } |a - z| < r, \\ 0 & \text{wenn } |a - z| > r. \end{cases}$$

Seite 90 [unten] sollte richtig lauten ($z_0 \to z$):

Wenn für eine einfach geschlossene Kurve φ die Windungszahl $w(\varphi, z) = 1$ ist,...

Seite 91 [Korollar 2.6.2] sollte richtig lauten ($f \to \varphi$):

...dann ist $w(\varphi, z) \in \mathbb{Z}$.

Seite 92 [Fußnote] sollte richtig lauten:

...in der *offenen Überdeckung* $\bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} \mathbb{C} \setminus H_\alpha(z_0)$

Seite 94 [Beweis Prop. 2.6.7] sollte richtig lauten ($z - 0 \to z_0$):

$$(z - z_0) \cdot f(z) = a_{-1} + \sum_{n \geqslant 0} a_n \cdot (z - z_0)^{n+1} \to a_{-1} \text{ für } z \to z_0.$$

Seite 99 [Fußnote] sollte richtig lauten ($n > 0 \to n > 1$):

…nur für $n > 1$ (also $f'(z_0) = 0$) brauchen wir …

Seite 103 [oben] sollte richtig lauten ($F \to f$):

…und völlig analog definieren wir … $\int_{-\infty}^{a} f$ als Limes von $\int_{-x}^{a} f$,

Seite 104 [oben] sollte richtig lauten:

…Dann gilt für $x, y \geqslant R$

$$\left|\int_x^y f\right| = \left|\left(\int_{-R}^{y} f - s\right) - \left(\int_{-R}^{x} f - s\right)\right| \leqslant \left|\int_{-R}^{y} f - s\right| + \left|\int_{-R}^{x} f - s\right| \leqslant 2\epsilon, \ldots$$

Seite 108 [Beispiel 3.1.10] sollte richtig lauten ($\int_{-\infty}^{r} \to \int_{-\infty}^{-r}$):

$$\int_{-\infty}^{-r} f + \int_{\varphi_r} f + \int_r^{\infty} f = 1 \cdot 2\pi\mathbb{i}. \text{ (dreimal derselbe Fehler)}$$

Seite 118 [Mitte] sollte richtig lauten:

KEIN Fehler (war nur in der Vorlesung verwirrt;-)

Seite 118 [unten] sollte richtig lauten ($y \to |y|$):

$$|\sin(\pi z)| = \cosh(\pi \cdot |y|) \geqslant 1, |\cos(\pi z)| = \sinh(\pi \cdot |y|) \leqslant \cosh(\pi \cdot |y|)$$

Seite 119 [unten] sollte richtig lauten (Vorzeichen falsch):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{b^2+n^2} = \frac{\pi}{b} \cdot \frac{\cosh(\pi \cdot b)}{\sinh(\pi \cdot b)}$$