Analysis I

Vortragender: Gerald Teschl

Mitschrift von Melita Šuput

a1201272

Wintersemester 2013

Quellen: Teschl: Mathematik für Informatiker, Taylor: Foundations of Analysis

0 Logik

Definition: Eine Aussage ($=a$) ist ein Satz, von dem man eindeutig unterscheiden kann ob er wahr oder falsch ist.

Definition: Die Verneinung (oder Negation) einer Aussage ist genau dann wahr, wenn die Aussage falsch ist. Symbolisch: $\bar{a}$ ($\neg\, a$).

$\overline{(x < 5)} = (x \geq 5)$

Definition:

UND-Verknüpfung (Konjunktion) $a \wedge b$ ist genau dann wahr, wenn a und b beide wahr sind.

ODER-Verknüpfung (Disjunktion) $a \vee b$ ist genau dann wahr, wenn mindestens eine der Aussagen a oder b wahr ist.

ENTWEDER/ODER-Verknüpfung $a \text{ XOR } b$ ist genau dann wahr, wenn genau eine der Aussagen a und b (aber nicht beide!) wahr ist.

Wahrheitstabelle:

a	$\bar{a}$
0	1
1	0

a	b	$a \vee b$	$a \wedge b$	$a \text{ XOR } b$
0	0	0	0	0
1	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	1	1	1	0

Definition: Ersetzt man in einer Aussage a eine Konstante durch eine Variable x, so entsteht eine Aussageform.

Beispiel: $x^2 < 15$ und $x^2 + 1 = 5$

Definition:

ALL-Aussage Für alle x (aus einer bestimmten Menge) ist $a(x)$ wahr.

$\forall\, x : a(x)$ ($\forall$...All-Quantor)

EXISTENZ-Aussage Es gibt mindestens ein x (aus einer bestimmten Menge), sodass $a(x)$ wahr ist.

$\exists\, x : a(x)$ ($\exists$...Existenz-Quantor)

Satz: Verneinung von All- und Existenz-Aussagen

$\overline{\forall\, x : a(x)} = \exists\, x : \overline{a(x)}$; $\overline{\exists\, x : a(x)} = \forall\, x : \overline{a(x)}$

Definition:

WENN-DANN-Verknüpfung (Subjunktion) $a \rightarrow b$

GENAU-DANN-Verknüpfung (Bijunktion) $a \leftrightarrow b$

Implikation $a \Rightarrow b$ (aus a folgt b; a ist hinreichend für b; b ist notwendig für a)

$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{b} \rightarrow \bar{a}$	a	b	$a \rightarrow b$	$b \rightarrow a$	$a \leftrightarrow b$	$(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$
1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1

1 Mengen und Funktionen

1.1 Mengen und Funktionen

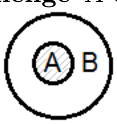
Sets

Menge A $A = \{1,2,3\}$

Element $x \in A$ $B = \{x \in A : a(x)\}$[1]

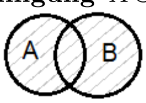
Beispiel: $(0,3) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 3\}$; $[0,3) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 3\}$; $[0,3] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 3\}$

Teilmenge $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A : x \in B$; $A \subsetneq B \Leftrightarrow A \subset B \wedge A \neq B$

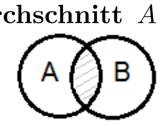


Leere Menge ϕ, $\{\}$

Vereinigung $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$



Durchschnitt $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$



Beispiel: $A = [-1,3]$, $B = (1,5)$; $A \cap B = (1,3]$, $A \cup B = [-1,5)$

$\cap\mathscr{A} = \{x | \forall A \in \mathscr{A} : x \in A\}$[2]; $\cup\mathscr{A} = \{x | \exists A \in \mathscr{A} : x \in A\}$; $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}, \cup\mathscr{A} = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$

Beispiel: $\mathscr{A} = \{[s,2] | 0 < s < 1, s \in \mathbb{R}\}$

Ist $\cap\mathscr{A} = [1,2]$?

$\boxed{A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A}$

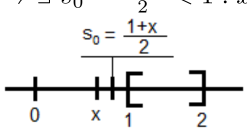
Beweis: $[1,2] \subseteq [s,2]$, $0 < s < 1$; $[1,2] \subseteq A \quad \forall A \in \mathscr{A}$

Angenommen $x \in \cap\mathscr{A}$ und $x \notin [1,2]$

(i) $x < 1$ $(0 < x < 1)$; (ii) $x > 2$

(ii) ist nicht möglich, da $x > 2$ nicht mehr in dem Intervall [1,2] ist.

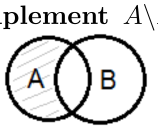
$\Rightarrow \exists\ s_0 = \frac{1+x}{2} < 1 : x \notin [s_0, 2] \Rightarrow x \notin \cap\mathscr{A}$[3] $\lightning$

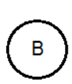


Damit ist (i) auch nicht möglich. $\blacksquare$

$\cup\mathscr{A} = (0,2]$ wird ähnlich wie beim vorangegangenen Beispiel bewiesen.

Komplement $A \backslash B = \{x \in A | x \notin B\}$; $B^c = x \backslash B$





---

[1] $x \in A$: x Element aus A, *für die gilt*

[2] $\mathscr{A}$ ist eine Kollektion von Mengen; Zusammenfassung von Mengen

[3] Hier wurde der Mittelwert gebildet und s_0 ist so gewählt, dass es größer als x und kleiner als 1 ist wobei x ebenfalls kleiner als 1 ist

Beispiel: $x = \mathbb{R}; [-2,2]^c = (-\infty,-2) \cup (2,\infty)$

Funktionen

Definition: Eine Funktion $f : A \to B$ ist eine Vorschrift die jedem Element $x \in A$ ein Element $f(x) \in B$ zuordnet.

- $f(E) = \{f(x) | x \in E\}$ Bildmenge von $E \subset A$
- B Wertebereich
- Injektiv $:\Leftrightarrow x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$
- Surjektiv $:\Leftrightarrow f(A) = B$
- Bijektiv[4] $:\Leftrightarrow$ Injektiv $\wedge$ Surjektiv

Beispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to f(x) = x^2$; "$x^2 = 1$" $\to$ Bild

$$x^2 = \begin{cases} -1 \\ 0 \\ 1 \end{cases}$$

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ weder surjektiv noch injektiv

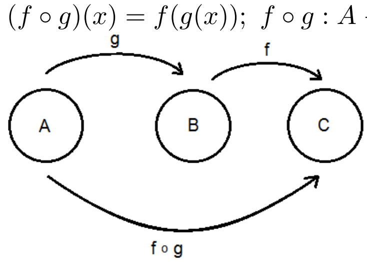
$\mathbb{R} \to [0,\infty)$ surjektiv

$[0,\infty) \to \mathbb{R}$ injektiv

$[0,\infty) \to [0,\infty)$ bijektiv

- Verkettung: $g : A \to B,\ f : B \to C$

  $(f \circ g)(x) = f(g(x));\ f \circ g : A \to C$



- Urbild: $f^{-1}(E) := \{x \in A | f(x) \in E\}$

  $f(x) = x^2$; $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$[5], $f^{-1}(\{-1\}) = \phi$, $f^{-1}(\{1\}) = \{-1,+1\}$

Satz 1.1.6.: Sei f eine Funktion mit $f : A \to B$ und $E, F \subset B$, dann gilt:

(a) $f^{-1}(E \cup F) = f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F)$

(b) $f^{-1}(E \cap F) = f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F)$

(c) $f^{-1}(E \backslash F) = f^{-1}(E) \backslash f^{-1}(F)$ falls $F \subset E$

Beweis: (a) ((b) und (c) analog!)

$x \in f^{-1}(E \cup F) \Leftrightarrow f(x) \in E \cup F \Leftrightarrow f(x) \in E \vee f(x) \in F \Leftrightarrow x \in f^{-1}(E) \vee x \in f^{-1}(F) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F)$ ■

Satz 1.1.7.: Sei f eine Funktion mit $f : A \to B$ und $E, F \subset A$, dann gilt:

(a) $f(E \cup F) = f(E) \cup f(F)$

(b) $f(E \cap F) \subset f(E) \cap f(F)$

---

[4] Bijektive Abbildungen sind immer umkehrbar!

[5] das soll herauskommen, das kommt heraus

(c) $f(E)\backslash f(F) \subset f(E\backslash F)$ falls $F \subset E$

Beweis: (c) ((a) und (b) analog!)

$y \in f(E)\backslash f(F) \Leftrightarrow y \in f(E) \Leftrightarrow y = f(x)\ mit\ x \in E \wedge y \notin f(F) \Rightarrow x \notin F \Rightarrow y \in f(E\backslash F)$ ■

Beispiel: $f(x) = x^2,\ \ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$E = (0, \infty)$ und $F(-\infty, 0) \Rightarrow E \cap F = \phi\ \ \rightsquigarrow disjunkt \Rightarrow f(E \cap F) = \phi$

$f(E) = f(F) = (0, \infty) \Rightarrow f(E) \cap f(F) = (0, \infty)$

Karthesisches Produkt $A \times B = \{(a, b)|a \in A,\ b \in B\},\ \ A \times B \times C = \{(a, b, c)|a \in A,\ b \in B,\ c \in C\}$

$f : A \to B;\ \Gamma(f)^6 = \{(x, f(x))|x \in A\} \subseteq A \times B$

1.2 Die natürlichen Zahlen

N1: Es gibt ein Element $1 \in \mathbb{N}$

N2: $\forall n \in \mathbb{N}$ existiert genau ein Nachfolger $s(n)$

N3: 1 ist kein Nachfolger von irgendeinem Element $(1 \to 2 \to 3 \to 1)\lightning$

N4: Zwei Elemente haben genau dann den gleichen Nachfolger, wenn sie gleich sind: $s(n) = s(m) \Rightarrow n = m$

N5: Falls $A \subseteq \mathbb{N}$ mit $1 \in A$ und abgeschlossen unter Nachfolgern ist ($n \in A \Rightarrow s(n) \in A$, wenn n drinnen ist dann ist auch der Nachfolger drinnen), dann gilt $A = \mathbb{N}$

$1, s(1), s(s(1)), s(s(s(1))), ...$

Satz 1.2.1.: Angenommen $\{P_n\}$ ist eine Folge von Aussagen, für jedes n gibt es eine Aussage $P_n\ \forall\ n \in \mathbb{N}$, falls

$$\left.\begin{array}{l} P_1 \text{ wahr ist} \\ P_n \Rightarrow P_{s(n)}{}^7 \end{array}\right\} \text{Induktion}$$

dann ist P_n für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig

Induktive Definition:

- $x_1 \in X$ und $f_n : X \to X$ gegeben
- $x_{s(n)} = f_n(x_n)$
- $x_1,\ \underbrace{f_1(x_1)}_{x_2},\ \underbrace{f_2(x_2)}_{x_3}$

Definition 1.2.4.: Sei $m \in \mathbb{N}$, dann ist: $m + 1 = s(m) \rightsquigarrow m + s(n) = s(m + n)$

Beweis durch Induktion

Beispiel: Jede Zahl der Form $5^n - 2^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist durch 3 teilbar

Induktionsanfang: $n = 1 :\ \ 5^1 - 2^1 = 3$

$n \to n + 1 : 5^{n+1} - 2^{n+1} = 5^{n+1} - 5 \cdot 2^n + 5 \cdot 2^n - 2^{n+1} = 5 \cdot (5^n - 2^n) + 2^n \cdot (5 - 2) = 5 \cdot \underbrace{(5^n - 2^n)}_{\text{durch 3 teilbar}} + \underbrace{2^n \cdot 3}_{\text{durch 3 teilbar}}$ ■

Beispiel: Seien $x_1 = 1$ und $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1}$

zu zeigen: $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < ... < 2$

$P_1 : x_1 < x_2 < 2,\ \ P_n : x_n < x_{n+1} < 2$

Induktionsanfang P_1: $1 < \sqrt{2} < 2$ $\quad \to$ Überprüfung: $/^2 \to 1 < 2 < 4$

[6] Graph von f; Graph der Funktion

[7] P_n ist richtig, deswegen ist $P_{s(n)}$ richtig

Induktionsschritt: $x_n < x_{n+1} < 2$

$\sqrt{x_n + 1} < \sqrt{x_{n+1} + 1} < \sqrt{3}$

$P_{n+1} : x_{n+1} < x_{n+2} < \sqrt{3} < 2 \quad \blacksquare$

Definition: Binomialkoeffizient

$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}, \quad 0 \leq k \leq n \qquad n,\ k \in \mathbb{N}_0$

$0! := 1, \quad 1! := 1, \quad n! := n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ...1$

$(n+1)! = (n+1) \cdot (n)!$

$= (n+1) \cdot (n) \cdot (n-1)!$

$= (n+1) \cdot (n) \cdot (n-1) \cdot (n-2)!$

$\vdots$

$= (n+1) \cdot (n) \cdot (n-1) \cdot ...1!$

Satz 1.2.12.: Binomialformel

$(x+y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}$

Beweis: Induktion nach $n \in \mathbb{N}$

Induktionsanfang $n = 1: \quad x + y = \sum\limits_{k=0}^{1} \binom{1}{k} \cdot x^k \cdot y^{1-k} = \binom{1}{0} \cdot x^0 \cdot y^1 + \binom{1}{1} \cdot x^1 \cdot y^0 = \underbrace{\frac{1!}{0! \cdot 1!}}_{=1} \cdot y + \underbrace{\frac{1!}{1! \cdot 0!}}_{=1} \cdot x = y + x$

Induktionsschritt: $n \to n+1: \quad (x+y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k} \quad / \cdot (x+y)$

$(x+y)^{n+1} = (x+y) \cdot \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}$

$= \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{k+1} \cdot y^{n-k} + \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n+1-k}$

z.z.: $(x+y)^{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot x^k \cdot y^{n+1-k}$

Indexverschieben $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \cdot x^k \cdot y^{n+1-k} + \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n+1-k}$

$= \left[\sum\limits_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} \cdot x^k \cdot y^{n+1-k} - \underbrace{\binom{n}{-1}}_{:=0} \cdot x^0 \cdot y^{n+1} \right] + \left[\sum\limits_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n+1-k} - \underbrace{\binom{n}{n+1}}_{:=0} \cdot x^{n+1} \cdot y^0 \right]$[8]

$= \sum\limits_{k=0}^{n+1} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] \cdot x^k \cdot y^{n+1-k} \qquad$ Ist $\binom{n+1}{k} = \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right]$?

z.z.: $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

1.3 Ganze und rationale Zahlen

Definition 1.3.1.: Kommutativer Ring[9] (mit eins)[10]

- Menge R
- Addition $R \times R \to R;\ (a,b) \mapsto a + b$
- Multiplikation $R \times R \to R;\ (a,b) \mapsto a \cdot b$

A1. (Kommutativgesetz) $a + b = b + a\ \forall\ a, b \in R$

A2. (Assiozativgesetz) $a + (b + c) = (a + b) + c\ \ \forall\ a, b, c \in R$

[8]Hier darf k weder kleiner 0 sein noch größer als n

[9]Ring bedeutet, dass das inverse Element bezüglich der Multiplikation fehlt

[10]siehe M3

A3. (Identität) $\exists\, 0 \in R : a + 0 = a \;\forall\, a \in R$

A4. (Inverses Element) $\forall\, a \in R \;\exists\, (-a) \in R : a + (-a) = 0$

M1. (KG) $a \cdot b = b \cdot a$

M2. (AG) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

M3. (ID) $\exists\, 1 : 1 \cdot a = a$

D. (Distributivgesetz) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Beispiel 1.3.2.: F ein Ring, $x, y, z \in F$

(a) $x + z = y + z \Rightarrow x = y$

(b) $x \cdot 0 = 0$

(c) $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$

z.z.:

(a) $x + z = y + z \quad / + (-z)$

$x \underbrace{+z + (-z)}_{\text{nach A4 } =0} = y \underbrace{+z + (-z)}_{=0}$

$\underbrace{x + 0 = y + 0}_{\text{nach A3}} \Rightarrow x = y$

(b) $\underbrace{0 + 0 = 0}_{\text{nach A3}} \quad / \cdot x$

$x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0$

$\underbrace{x \cdot 0 + x \cdot 0}_{\text{nach D}} = x \cdot 0 \quad / - x \cdot 0$

$\underbrace{x \cdot 0 = 0}_{\text{nach (a)}}$

Definition 1.3.3.: Ein Körper is ein kommutativer Ring in dem zusätzlich M4(INV) $\forall\, x \neq 0 \;\exists\, x^{-1} : x \cdot x^{-1} = 1$ gilt

Beispiel: $F = \{0, 1\}$

$+$	0	1
0	0	1
1	1	$\boxed{0}$[11]

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Definition: Rationale Zahlen

$\mathbb{Q} = \{\frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$

Äquivalenzrelation: $\frac{n'}{m'} = \frac{n}{m} :\Leftrightarrow n' \cdot m = n \cdot m'$

$\frac{n}{m} + \frac{n'}{m'} := \frac{n' \cdot m + n \cdot m'}{m \cdot m'}$

$\frac{n}{m} \cdot \frac{n'}{m'} := \frac{n \cdot n'}{m \cdot m'}$

Satz: $\mathbb{Q}$ ist ein Körper[12]

Die Ordnung auf $\mathbb{Q}$

$$\underbrace{\frac{p}{q} \leq \frac{n}{m}}_{\in \mathbb{Q}} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{n}{m} - \frac{p}{q}}_{\frac{n \cdot q - m \cdot p}{m \cdot q} \geq 0} \geq 0$$

Definition 1.3.6.: Ein geordneter Körper F ist ein Körper F mit einer Ordnung "$\leq$":

O1. $x \leq y$ oder $y \leq x$

[11] Dadurch, dass es sonst kein Additives Inverses zu 1 geben würde, muss an der markierten Stelle eine 0 stehen. $\boxed{\mathbb{Z}_2}$

[12] eng. Field

O2. $x \leq y$ und $x \geq y \Leftrightarrow x = y$

O3. $x \leq y$ und $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (Transitiv)

O4. $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

O5. $x \leq y,\ 0 \leq z \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$

Satz 1.3.9.: Sei $k \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = k$. Dann ist $x \in \mathbb{N}$, wenn $x^2 = k$ eine rationale Lösung hat.

Beweis (durch Widerspruch): Angenommen $x^2 = k$ mit $x \in \mathbb{Q}$ aber $x \notin \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N};\ x = \frac{m}{n}$ mit m und n Teilerfremd[13] und $n \neq 1$

$\frac{m^2}{n^2} = k \Leftrightarrow m^2 = k \cdot n^2$

$\exists\ p$: Primzahl mit p teilt n

$\Rightarrow p$ teilt n^2

$\Rightarrow p$ teilt $k \cdot n^2$

$\Rightarrow p$ teilt m^2

$\Rightarrow p$ teilt m $\lightning$ zu m und n Teilerfremd $\Rightarrow$ Annahme $x \in \mathbb{Q} \backslash \mathbb{N}$ falsch

Folgerung: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

1.4 Die reellen Zahlen

Dedekind-Schnitte

$L_r = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < r\} = \text{"}(-\infty, r) \cap \mathbb{Q}\text{"},\ r \in \mathbb{Q}$

$L_{\sqrt{2}} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} \cup \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\} = \text{“}(-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}\text{”}$

Definition 1.4.1.: Eine Teilmenge $L \subset \mathbb{Q}$ heißt Dedekind-Schnitt, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(a) $L \neq \mathbb{Q}$ und $L \neq \phi$

(b) L besitzt kein größtes Element $\{\nexists\ m \in L : x \leq m\ \forall\ x \in L\}$

(c) Falls $x \in L \Rightarrow y \in L\ \forall\ y$ mit $y < x$

$L + \tilde{L} = \{r + s \mid r \in L,\ s \in \tilde{L}\} \subseteq \mathbb{Q}$

$L \cdot \tilde{L} = \{r \cdot s \mid r \in L,\ s \in \tilde{L}\}$[14]

Das Vollständigkeits-Axiom

Angenommen, F sei ein geordneter Körper, dann heißt eine Menge $A \subset F$ nach oben beschränkt, falls ein $m \in F$ existiert mit $x \leq m$ für alle $x \in A$.

Beispiel: $A = (0, 2)$, kleinste obere Schranke $m = 2$; $A = (0, \infty)$ nach oben unbeschränkte Menge; $A = (0, 2],\ m = 2$; $A = (0, \sqrt{2}) \rightarrow$ in den reellen Zahlen ist $\sqrt{2}$ kleinste obere Schranke, in den rationalen Zahlen gibt es keine kleinste obere Schranke

Definition 1.4.3.: Ein geordneter Körper heißt vollständig, falls $C.$[15] jede nach oben beschränkte Menge eine kleinste obere Schranke hat.

Satz 1.4.4.: $\mathbb{R}$ ist vollständig

Beweis[16]: $A \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt (durch m)

[13] Keine gemeinsamen nicht trivialen Teiler

[14] L und $\tilde{L}$ müssen beide das gleiche Vorzeichen haben, weil es sonst Probleme gibt mit $r \cdot s$

[15] The Completeness Axiom

[16] Nicht kompletter Beweis, eher eine Idee

Behauptung: $L = \bigcup_{x \in A} L_x$[17] ist kleinste obere Schranke von A

L ist Dedekind'scher Schnitt: $L = L_y$ mit $y \in \mathbb{R}$

$\forall\, x \in A: \; L_x \subset L_y \Leftrightarrow x \leq y$

Angenommen m obere Schranke und $m < y$: Widerspruch, da dadurch m in L_x ist und deswegen kleiner x wäre / sein könnte. Darum wählen wir $y \leq m$ $\blacksquare$

Definition 1.4.7.: Ein geordneter Körper heißt archimedisch, falls für alle $x \in F$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $x < n$.

Satz 1.4.8.: Die reellen Zahlen sind archimedisch

Beweis (durch Widerspruch): Angenommen $\exists\, x: \; \forall\, n \in \mathbb{N}: \; n < x$

$\Rightarrow \mathbb{N}$ ist nach oben beschränkt

$\overset{C}{\Rightarrow} \exists\, b$: kleinste obere Schranke von $\mathbb{N}$

$\Rightarrow b - 1$ ist keine obere Schranke

$\Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$ mit $b - 1 < n \quad / + 1$

$b < n + 1 \quad \lightning \quad \blacksquare$

Beispiel: $\forall\, x > 0 \; \exists\, n \in \mathbb{N}: \; \frac{1}{n} < x$

Beweis: $\frac{1}{x} < n \Leftrightarrow x > \frac{1}{n}$ $\blacksquare$

1.5 SUP und INF

Satz 1.5.1.: Jede nichtleere nach unten beschränkte Menge besitzt eine größte untere Schranke.

$-A = \{-a \mid a \in A\} \quad A, B \subset \mathbb{R}$

$A \pm B = \{a \pm b \mid a \in A, b \in B\}$

Beweis: "Betrachte $-A = \{-x \mid x \in A\}$" $\blacksquare$

Erweiterte reelle Zahlen $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

- $\pm\infty + x = \pm\infty \quad x \in \mathbb{R}$
- $\pm\infty \cdot x = \pm\infty \quad x > 0$
- $+\infty - \infty = \; ?$
- $\frac{x}{\infty} = 0 \quad x \in \mathbb{R}$
- $\infty \cdot 0 = \; ?$
- $\frac{0}{\infty} = \; ?$
- $\frac{\infty}{\infty} = \; ?$
- $sup(5, +\infty) = +\infty$

Definition 1.5.2.: Sei $A \subset \mathbb{R}$, dann ist:

- $sup \; A = \begin{cases} \text{kleinste obere Schranke falls A nach oben beschränkt ist} \\ +\infty \text{ sonst} \end{cases}$
- $inf \; A = \begin{cases} \text{größte untere Schranke falls A nach unten beschränkt ist} \\ -\infty \text{ sonst} \end{cases}$

[17] L ist die Vereinigung von L_x

Bemerkung: $inf\ A = -sup\ (-A)$

Beispiel:

$A = (-1, 1] \quad inf\ A = -1,\ sup\ A = +1$

$B = (-\infty, 5) \quad inf\ B = -\infty,\ sup\ B = +5$

$C = \{\frac{n^2}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ Vermutung: $inf\ C = 0,\ sup\ C = \infty$

$\frac{n^2}{n+1} = \frac{n}{1+\frac{1}{n}} \geq \frac{n}{2} \Rightarrow sup\ C = \infty$

$\frac{n^2}{n+1} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow inf\ C = \frac{1}{2} = \ min\ C$

$D = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

$\frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow sup\ D = 1 = max\ D$

$\frac{1}{n} > 0 \Rightarrow inf\ D = 0$

D besitzt kein Minimum, da 0 nicht in der Menge enthalten ist (man nähert sich ihr nur asymptotisch). Das Infimum muss nicht angenommen werden.

Satz 1.5.7.:

(a) $inf\ A \leq sup\ A$

(b) $sup(A + B) = sup\ A + sup\ B$

(c) $sup(A - B) = sup\ A - inf\ B$

(d) $sup(-A) = -inf\ (A)$ und $inf(-A) = -sup\ (A)$

(e) $A \subset B \Rightarrow sup\ A \leq sup\ B$ und $infB \leq inf\ A$

SUP und INF für Funktionen

Erinnerung: Sei $f : X \to \mathbb{R}$ und $A \subset X$, dann ist $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$

Definition 1.5.8.: $\underset{A}{sup}\ f = sup\ f(A)$ und $\underset{A}{inf}\ f = inf\ f(A)$

Beispiel:

(a) $f(x) = sin(x), \quad I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$f(I) = [-1, 1)$

$\underset{I}{sup}\ f = 1;\ \underset{I}{inf}\ f = -1 \to \underset{I}{min}\ f$

(b) $f(x) = \frac{1}{x};\quad I = (0, \infty)$

$f(I) = (0, \infty)$

$\underset{I}{inf}\ f = 0;\ \underset{I}{sup}\ f = \infty$

Kein Maximum und Minimum; 0 wird nur asymptotisch erreicht.

Satz 1.5.10.:

(a) $\underset{A}{sup}\ c{\cdot}f = c \cdot \underset{A}{sup}\ f$ und $\underset{A}{inf}\ c{\cdot}f = c \cdot \underset{A}{inf}\ f \quad c > 0$

(b) $\underset{A}{sup}\ (-f) = -\underset{A}{inf}\ (f)$

(c) $\underset{A}{sup}\ f{+}g \leq \underset{A}{sup}\ f + \underset{A}{sup}\ g$ und $\underset{A}{inf}\ f + \underset{A}{inf}\ g \leq \underset{A}{inf}\ (f{+}g)$

(d) $sup\{f(x) - f(y) : x, y \in A\} = \underset{A}{sup}\ f - \underset{A}{inf}\ f$

2 Folgen

2.1 Grenzwert von Folgen

Definition Betrag:

$| x |= \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

Abstand zwischen x und a ist kleiner ϵ: $| x - a |< \epsilon$

Satz 2.1.1.:

(a) $| y |< \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < y < \epsilon$

(b) $| y - a |< \epsilon \Leftrightarrow a - \epsilon < y < a + \epsilon$

Satz 2.1.2. (Dreiecksungleichung):

- $| a + b |\leq| a | + | b |$
- $|| a | - | b ||\leq| a - b |$

Beweis:

(a) $-(| a | + | b |) \leq a + b \leq| a | + | b |$

(b) $| a |=| b - (b - a) |\leq| a | + | a - b |\Rightarrow| a | - | b |\leq| a - b |$ ■

2.2 Using the Definition of Limit

Notation von Folgen: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$; $\{a_n\}$; a_n; $a_1, a_2, a_3, ...$

Beispiel:

(a) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}: \ -1, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, +\frac{1}{4}, ...$ alternierende Folge

(b) $a_n = 2 \cdot n: \ 2, 4, 6, 8, ...$

(c) $a_1 = 2, \ a_{n+1} = \frac{a_n+1}{2}: \ 2, \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, ...$

Definition Grenzwert bzw. Konvergenz: Eine Folge reeller Zahlen $\{x_n\}$ konvergiert gegen eine Zahl $a \in \mathbb{R}$, falls für jedes (noch so klein) vorgegebenes $\epsilon > 0$ ein zugehöriger Index $N(\epsilon)$ existiert, sodass $| a_n - a |< \epsilon$ für alle $n > N(\epsilon)$.

(Kurz: $\forall \ \epsilon > 0 \ \exists \ N :| a_n - a |< \epsilon, \ \forall \ n > N$)

a heißt der Grenzwert $\lim_{n \to \infty} a_n = a, \ a_n \to a$[18]

$A = (0, 1), \ B = (2, 3)$

$A + B = \{x + y \mid x \in A, \ y \in B\} = (2, 4)$

$sup \ A = 1, \ \ sup \ B = 3 \Rightarrow sup(A + B) = 4$

$B + \{x\} = (2 + x, 3 + x)$

Beispiel Grenzwert:

$a_n = \frac{1}{n} \to 0$[19] Konvergiert $\frac{1}{n}$ gegen 0?

gegeben: $\epsilon > 0$, z.z.: $\exists \ N(\epsilon)$ mit $| a_n - a |< \epsilon \ \forall \ n > N(\epsilon)$, $\frac{1}{n} < \epsilon \ \forall \ n > N$, $N = \lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor$[20]

$a_n = \frac{n}{2 \cdot n+1} = \frac{1}{2+\frac{1}{n}} \to \frac{1}{2}$

gegeben: $\epsilon > 0 : \ \exists \ N : \ \ | a_n - a |=| \frac{n}{2 \cdot n+1} - \frac{1}{2} |< \epsilon$

$| \frac{n}{2 \cdot n+1} - \frac{1}{2} |=| \frac{2 \cdot n-(2 \cdot n+1)}{4 \cdot n+2} |=| \frac{2 \cdot n-2 \cdot n-1}{4 \cdot n+2} |=| \frac{-1}{4 \cdot n+2} |= \frac{1}{4 \cdot n+2} < \frac{1}{4 \cdot n} < \frac{1}{n}$

[18] a_n konvergiert gegen a

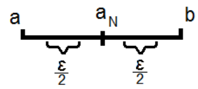
[19] Nullfolge

[20] $\lfloor ... \rfloor$ Floor-Funktion rundet auf die nächste ganze Zahl ab

$N = \lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor$[21]

Satz: Gilt $a_n \to a$ und $a_n \to b$ dann folgt $a = b$ (Grenzwerte sind eindeutig).

Beweis durch Widerspruch ($\frac{\epsilon}{2}$-Trick):



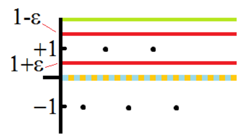
Angenommen: $a \neq b \Rightarrow \mid a - b \mid := \epsilon > 0$

$a_n \to a \Rightarrow \exists\ N_1 : \quad \mid a_n - a \mid < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall\ n > N_1$

$a_n \to b \Rightarrow \exists\ N_2 : \quad \mid a_n - b \mid < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall\ n > N_2$

$\forall\ n\ max(N_1, N_2) : \underline{\epsilon =} \mid a - b \mid = \mid (a - a_n) + (a_n - b) \mid \leq$[22] $\underbrace{\mid a - a_n \mid}_{<\frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{\mid a_n - b \mid}_{<\frac{\epsilon}{2}} \underline{< \epsilon}$ ↯ ■

Beispiel: $a_n = (-1)^n \qquad -1, +1, -1, +1, -1, \ldots$ ist <u>nicht</u> konvergent! Sie besteht zwar aus 2 konvergenten Teilfolgen, jedoch wäre das Folgenglied nicht mehr im Bereich $(1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$ enthalten.



Beispiel: $a_n = \frac{n}{2 \cdot n - 3} = \frac{1}{2 - \frac{3}{n}} \to \frac{1}{2}$

$\mid \frac{n}{2 \cdot n - 3} - \frac{1}{2} \mid = \mid \frac{2 \cdot n - 2 \cdot n + 3}{4 \cdot n - 6} \mid = \frac{3}{4 \cdot n - 6} < \frac{3}{n} \qquad n > 2$

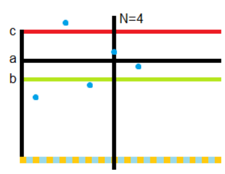
$4 \cdot n - 6 = n + \underbrace{(3 \cdot n - 6)}_{>0} \qquad n > 2$

Satz 2.2.3.: Falls $a_n \to a$ und $b < a < c$, dann existiert ein N mit $b < a_n < c \quad \forall\ n$[23] $\geq N$

Korollar 2.2.4.: Konvergente Folgen sind beschränkt.

$\exists\ m,\ M : \ m \leq a_n \leq M \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

Satz 2.2.7.: $a_n \to a \Leftrightarrow \forall\ \epsilon$ nur endlich viele n erfüllen $\mid a_n - a \mid \geq \epsilon$.



2.3 Grenzwertsätze

Satz 2.3.1.: Seien $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ Folgen mit $b_n \to 0$. Falls $a \in \mathbb{R}$ existiert und ein K mit $0 \leq \mid a_n - a \mid \leq b_n$ für alle $n > K$, dann ist $a_n \to a$.

Beweis: $\epsilon > 0 \ \ \exists\ N : \quad \mid a_n - a \mid < \epsilon \ \ \forall\ n > N$

Angenommen: $b_n \to 0 \Rightarrow \exists\ N_2 : \underbrace{\mid b_n - 0 \mid}_{b_n} < \epsilon \ \ \forall\ n > N_2$

$\mid a_n - a \mid \leq b_n < \epsilon \quad \underbrace{n > N_2,\ n > K}_{n > N_3 = max(K < N_1)}$

Wähle $N = N_3$ ■

[21] $\frac{1}{\epsilon}$, weil der Grenzwert mit $\frac{1}{n}$ abgeschätzt wurde; Prof.: "Zu $\epsilon > 0$ wähle $N = \lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor$"

[22] Dreiecksungleichung

[23] Laufindex

Satz 2.3.2.: Sei $a_n \to 0$ und b_n beschränkt. Dann $a_n \cdot b_n \to 0$.

Bemerkung: $\{b_n\}$ beschränkt $\Leftrightarrow\ \exists\, m, M:\ m \leq b_n \leq M\ \forall\, n$

Beweis: z.z.: $\epsilon > 0\ \exists\, N : \mid a_n \cdot b_n \mid < \epsilon\ \ \forall\, n > N$

Voraussetzung: $\mid b_n \mid < M,\ \ \forall \delta > 0\ \exists : \mid a_n \mid < \delta\ \ \forall\, n > N_1$

$\underline{\mid a_n \cdot b_n \mid} \leq \mid a_n \mid \cdot \mid b_n \mid < \delta \cdot M \underline{\leq \epsilon}\ \ \forall\, n > N_1$

ϵ: Wähle $\delta \leq \frac{\epsilon}{M} \Rightarrow N_1 = N$ ■

Satz 2.3.3.: Seien a_n, b_n, c_n Folgen mit $b_n \leq a_n \leq c_n\ \ \forall\, n > K$. Falls $b_n \to a$ und $c_n \to a$, dann folgt $a_n \to a$.

Beweis: z.z.: $\epsilon > 0\ \exists\, N : \mid a_n - a \mid < \epsilon\ \ \forall\, n > N$

$\epsilon_1 > 0\ \exists\, N_1 : \mid b_n - a \mid < \epsilon_1\ \ \forall\, n > N_1$

$\epsilon_2 > 0\ \exists\, N_2 : \mid c_n - a \mid < \epsilon_2\ \ \forall\, n > N_2$

Wähle $\epsilon = \epsilon_1 = \epsilon_2,\quad N = max(N_1, N_2)$

$a - \epsilon < b_n < a + \epsilon$

$a - \epsilon < c_n < a + \epsilon$

$\underbrace{a - \epsilon < b_n \leq a_n \leq c_n < a + \epsilon}_{|a_n - a| < \epsilon\ \ \forall\ n > N}$ ■

Beispiel: $a_n \to a$ mit $a_n > 0$ und $a > 0 \Rightarrow \sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$

$\mid \sqrt{a_n} - \sqrt{a} \mid = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} < \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \mid a_n - a \mid \to 0$

Beispiel: $\mid a \mid < 1\quad a^n \to 0$

$(1+b)^n = 1 + n \cdot b \underbrace{+ \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot b^2 + ... + b^n}_{\text{Wird nicht benötigt}}$[24]

Für $b > 0 \Rightarrow 1 + n \cdot b < (1+b)^n$[25] $\quad n \geq 2$

$\mid a \mid < 1,\ \frac{1}{|a|} > 1 \Rightarrow \frac{1}{|a|} = 1 + b$ mit $b > 0$

$\mid a^n \mid = \frac{1}{|a|^{-n}} = (1+b)^{-n} = \frac{1}{(1+b)^n} \leq \frac{1}{1+n \cdot b} < \frac{1}{n \cdot b} \to 0 \qquad\qquad \mid a \mid^n = \left(\frac{1}{1+b}\right)^n$

Satz 2.3.6.: $a_n \to a,\ b_n \to b,\ c \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}$

(a) $c \cdot a_n \to c \cdot a$

(b) $a_n + b_n \to a + b$

(c) $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$

(d) $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$ falls $b \neq 0$ (und $b_n \neq 0$)

(e) $a_n^k \to a^k$

(f) $a_n^{1/k} \to a^{1/k}$

Beweis:

(a) $\mid c \cdot a_n - c \cdot a \mid = \mid c \mid \cdot \mid a_n - a \mid \to 0$

(c) $\mid a_n \cdot b_n - a \cdot b \mid = \mid a_n \cdot b_n - a \cdot b_n + a \cdot b_n - a \cdot b \mid \leq \mid (a_n - a) \cdot b_n \mid + \mid a \cdot (b_n - b) \mid \leq \underbrace{\underbrace{\mid b_n \mid}_{\leq M} \cdot \underbrace{\mid a_n - a \mid}_{\to 0}}_{\to 0} + \underbrace{\mid a \mid \cdot \underbrace{\mid b_n - b \mid}_{\to 0}}_{\to 0} \overset{(b)}{\to} 0$

(e) $a_n \leq M,\quad a \leq M \qquad a_n^k - a^k = \underbrace{(a_n - a)}_{\to 0} \cdot \underbrace{(a_n^{k-1} + a_n^{k-2} \cdot a + ... + a^{k-n})}_{\leq k \cdot M^{k-1}}$ ■

Beispiel: $a_n = \frac{n^2 + 3 \cdot n + 1}{3 \cdot n^2 - 7 \cdot n + 2} = \frac{n^2 \cdot (1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2})}{n^2 \cdot (3 - \frac{7}{n} + \frac{2}{n^2})} \to \frac{1}{3}$

Satz 2.3.8.: $a_n \to a,\ b_n \to b$ und es gilt $a_n \leq b_n\ \ \forall\, n \geq K$. Dann folgt $a \leq b$.

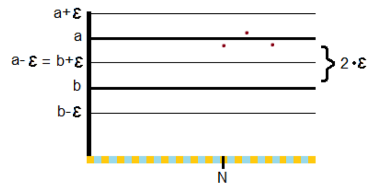
Beweis durch Widerspruch:

---

[24] Binomische Formel

[25] Bernoulli'sche Ungleichung

Angenommen: $a > b$, also $a - b = 2 \cdot \epsilon > 0 \mid a_n - a \mid < \epsilon \quad n > N_1$



$\mid b_n - b \mid < \epsilon \quad n > N_2$

$N = max(N_1, N_2)$

$\underline{a_n \geq} \; a - \epsilon = b + \epsilon \; \underline{\geq b_n} \quad \forall \, n > N \quad \lightning$

Korollar: $a_n \leq b_n \leq c_n \qquad a_n \to a, \; b_n \to b, \; c_n \to c \; \Rightarrow a \leq b \leq c$

Warnung: $a_n = \frac{1}{n} > 0 \quad a_n \to a = 0; \quad b_n = 0 \geq 0 \quad b_n \to b = 0; \qquad a_n > b_n \Rightarrow a \geq b$

2.4 Monotone Folgen

Folge a_n

Nicht-fallend, (monoton) steigend $a_{n+1} \geq a_n$

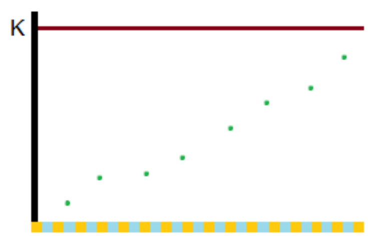
Nicht-steigend, (monoton) fallend $a_{n+1} \leq a_n$

Satz 2.4.1.: Jede beschränkte monotone Folge ist konvergent.

Beweis: $a_{n+1} \geq a_n$ und $a_n \leq K \; (a_1 < a_n)$

$A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R} \quad a = sup(A) \in \mathbb{R}$ da A beschränkt ist

Vermutung: $a_n \to a$ z.z.: $\epsilon > 0 \; \exists \; N: \; a - a_n < \epsilon$



$a_n \leq a < a + \epsilon \quad \forall \; n$ da a (kleinste) obere Schranke ist.

a kleinste obere Schranke $\Rightarrow \; \exists \; a_N$ mit $a_N > a - \epsilon \; \overset{Monotonie}{\Rightarrow} \; a_n > a - \epsilon \;\; \forall \; n > N$ $\blacksquare$

Beispiel: $a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{2}, \; a_1 = 0$

$a_{n+1} \geq a_n$ (VGL UE) $\; a_n \leq 1 \Rightarrow a_n \to a$

$$\left.\begin{matrix} b_n = a_{n+1} \\ c_n = \frac{a_n+1}{2} \end{matrix}\right\} = \qquad \left.\begin{matrix} b_n \to a \\ c_n \to \frac{a+1}{2} \end{matrix}\right\} = \qquad a = \frac{a+1}{2} \Rightarrow a = 1$$

Beispiel: $\left.\begin{matrix} a_{n+1} = a_n + 1 \\ a_1 = 0 \end{matrix}\right\} a_n = n - 1 \qquad a = a + 1 \Rightarrow 0 = 1 \quad \lightning$

Beispiel: $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2}{2 \cdot a_n} \qquad a_1 = 2$[26]

z.z.: $a_{n+1} \leq a_n \quad a_n > 0 \Leftrightarrow \frac{a_n^2+2}{2 \cdot a_n} \leq a_n \Leftrightarrow a_n^2 + 2 \leq 2 \cdot a_n^2 \Leftrightarrow 2 \leq a_n^2 \Rightarrow a_n \to a$

$a = \frac{a^2+2}{2 \cdot a} \Rightarrow a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$

[26]Kann man gegen beliebige reelle Zahl ersetzen und diese Zahl konvergiert gegen die Wurzel aus dieser Zahl ($x \to \sqrt{x}$)

Definition 2.4.4.: $lim\ a_n = \infty$ wenn $\forall\ M > 0\ \exists\ N : a_n > M\ \ \forall\ n > N$

Beispiel: $a_n = n \to \infty$; $\quad a_n = n^r \to \infty\ \ r \in \mathbb{N}$

Satz 2.4.6.: Jede monotone Folge hat einen Grenzwert

$a_n = \begin{cases} n & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$ Hat keinen Grenzwert!

Satz 2.4.7.: Seien $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ Folgen. Dann gilt:

(a) $lim\ a_n = \pm\infty \Leftrightarrow \pm a_n$[27] > 0 und $lim\ \frac{1}{a_n} = 0$

(b) b_n nach unten beschränkt und $a_n \to \infty \Rightarrow a_n + b_n \to \infty$ (außer a_n und b_n kompensieren sich)

(c) $lim\ a_n = -\infty :\Leftrightarrow lim(-a_n) = \infty$

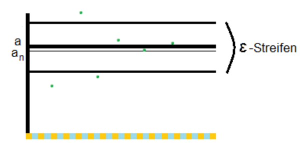
(d) $a_n \leq b_n$ und $a_n \to \infty \Rightarrow b_n \to \infty$

(e) $0 < k \leq b_n$ und $a_n \to \infty \Rightarrow a_n \cdot b_n \to \infty$ (außer a_n und b_n kompensieren sich; b_n konvergent und $b > 0$ ist ok)

Beispiel:

$a_n = \frac{2 \cdot n^2 + 3}{n+1} = \frac{n \cdot (2 + \frac{3}{n^2})}{1 + \frac{1}{n}} \to \infty$

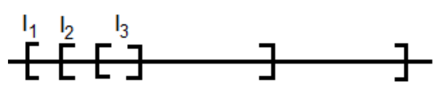
2.5 Cauchy Folgen



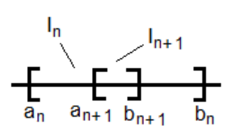
Verschachtelte Intervalle:

$I_1 \supset I_2 \supset I_3 ...$[28]

$I_n = [a_n, b_n]$ abgeschlossen und beschränkt



$I_{n+1} \subset I_n \Leftrightarrow a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$



Satz 2.5.1.: Sei I_n eine verschachtelte Folge von beschränkten, abgeschlossenen Intervallen, dann ist der Durchschnitt aller $I_n \neq \phi$[29] (es gibt mindestens ein x mit $x \in I_n\ \forall\ n$).

Beweis: $I_n = [a_n, b_n]$, a_n nicht fallend $\Rightarrow a_n \to a$, b_n nicht steigend $\Rightarrow b_n \to b$, aus $a_n < b_n \Rightarrow a \leq b \Rightarrow x$ mit $a \leq x \leq b$ erfüllen $x \in I_n\ \forall\ n$

$a_n \leq a \leq x \leq b \leq b_n \quad \forall\ n \qquad [a, b] \subset I_n\ \forall\ n$

Bemerkung: Abgeschlossen ist wichtig!

$I_n = (0, \frac{1}{n}) \quad \cap I_n = \phi$

$I_n = (-\infty, +\infty] \quad \cap I_n = \phi$

Definition: gegeben a_n und n_k sei eine monotone Folge natürlicher Zahlen mit $\lim\limits_{k \to \infty} n_k = \infty$, dann heißt $b_k = a_{n_k}$ Teilfolge

---

[27] Ab irgendeinem Index

[28] Gleichheit zugelassen

[29] $\cap_{n=1}^{\infty} I_n$

von a_n.

Beispiel:

$a_n = n,\ n_k = 2 \cdot k \qquad b_k = a_{n_k} = 2 \cdot k$

$a_n = (-1)^n \qquad b_n = a_{2 \cdot n} = (-1)^{2 \cdot n} = +1$

Satz: Aus $a_n \to a \Rightarrow b_n \to a$ für jede Teilfolge b_n von a_n.

Satz 2.5.5. (Bolzano-Weierstraß): Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Bemerkung: $a_n = n$

Beweis: $I_1 = [m, M] \supset \{a_k\}$

$I_2 \subset I_1,\ I_2 = \begin{cases} [m, \frac{m+M}{2}] & \text{Falls hier } \infty \text{ Folgenglieder liegen} \\ [\frac{m+M}{2}, M] & \text{sonst} \end{cases}$

$I_3 = ...$ Mit Induktion $\Rightarrow I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset ...$ mit

(i) Länge von I_k ist $\frac{M-m}{2}$

(ii) I_k enthält unendlich viele Folgenglieder

Aus Satz 2.5.1. $\Rightarrow \exists\ a \in \cap_k I_k$

Konstruiere Teilfolge: Für gegebenes K wähle $a_{n_k} \in I_k$ $\boxed{\frac{1}{2^k} = (\frac{1}{2})^k}$

Behauptung: $a_{n_k} \to a$

$| a_{n_k} - a | \leq \underbrace{\frac{M-m}{2^{k-1}}}_{\to 0}$ da $a_{n_k},\ a \in I_k$ ■

Cauchy-Folge

Definition 2.5.7.: Eine Folge a_n heißt Cauchy-Folge (CF) falls $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ N : | a_n - a_m | < \epsilon\ \forall\ n, m > N$

Satz 2.5.8.: $\{a_n\}$ ist konvergent $\Leftrightarrow \{a_n\}$ ist eine Cauchy-Folge.

Beweis: gegeben: $\epsilon > 0$

$\Rightarrow$ (aus Konvergenz folgt Cauchy-Folge)

z.z.: $\exists\ N : | a_n(r) - a | < \frac{\epsilon}{2}\ \ \forall\ n(r) > N \Rightarrow | a_n - a_m | = | a_n - a + a - a_m | \leq \underbrace{| a_n - a |}_{\leq \frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{| a - a_m |}_{\leq \frac{\epsilon}{2}} \leq \epsilon\ \ \forall\ n, m > N$

$\Leftarrow$ (aus Cauchy-Folge folgt Konvergenz)

(i) Cauchy-Folgen sind beschränkt

$\exists\ N : | a_n - a_m | < 1\ \forall\ n, m > N$

$| a_n - a_{N+1} | < \epsilon\ \forall\ n > N$

$a_{N+1} - 1 < a_n < a_{N+1} + 1\ \forall\ n > N$

$A_N + \{a_1, ..., a_N, a_{N+1} - 1, a_{N+1} + 1\}$

$m = min(A_N),\ M = max(A_N) \Rightarrow m \leq a_n \leq M\ \forall\ n$

(ii) a_n beschränkt $\Rightarrow \exists$ eine konvergente Teilfolge $a_{n_k} \to a$

(iii) Behauptung: $a_n \to a$

gegeben: $\epsilon > 0$

$| a_n - a_m | < \frac{\epsilon}{2} \quad n > N_1$ (a_n aus Cauchy-Folge)

$| a_{n_k} - a | < \frac{\epsilon}{2} \quad n > N_2$ ($a_{n_k} \to a$)

$| a_n - a | = | a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a | \leq | a_n - a_{n_k} | + | a_{n_k} - a | < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \qquad n, k > max(N_1, N_2)$ ■

Beispiel: $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \cdot \frac{k}{4^k}$ Klassisches Gegenbeispiel : $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

$| s_m - s_n | = | \sum\limits_{k=n+1}^{m} (-1)^k \cdot \frac{k}{4^k} | \leq \sum\limits_{k=n+1}^{m} \frac{k}{4^k} \leq \sum\limits_{k=n+1}^{m} \frac{1}{2^k}^{30} \leq \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \sum\limits_{j=0}^{m-n-1} \frac{1}{2^j} \underset{=}{\text{oBdA:}}^{m>n} \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^{m-n}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{2^{n+1}} \cdot (1 - \frac{1}{2^{m-n}}) =$

$\frac{1}{2^n} \cdot \underbrace{(1 - \frac{1}{2^{m-n}})}_{\leq 1} \leq \frac{1}{2^n}$

$\mid s_m - s_n \mid \leq \frac{1}{2} \quad min(n,m) \to 0 \Rightarrow s_n$ bilden Cauchy-Folge $\Rightarrow \underset{n=\infty}{lim} s_n$ existiert

Einschub: Geometrische Summenformel / Reihe

$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, \ \mid a \mid < 1$

$\sum_{k=0}^{0} a^k = a^0 = 1, \ \frac{1-a}{1-a} = 1$

$\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \sum_{k=0}^{n} a^k + a^{k+1} \overset{\text{IV}}{\underset{=}{\downarrow}} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + a^{n+1} = \frac{1-a^{n+1}+a^{n+1}-a^{n+2}}{1-a} = \frac{1-a^{n+2}}{1-a}$

2.6 LIMINF und LIMSUP

Sei eine beschränkte Folge a_n gegeben und $i_n = inf\{a_k : k \geq n\}$, $s_n = sup\{a_k : k \geq n\}$

Satz 2.6.1.:

(a) i_n nicht-fallend

(b) s_n nicht-steigend

(c) $i_n \leq a_n \leq s_n \ \forall \ n$

Definition 2.6.2.: $liminf \ a_n = lim \ i_n, \ limsup \ a_n = lim \ s_n$

a_n nach unten/oben beschränkt $:\Rightarrow limsup \ a_n = +\infty \ / \ liminf \ a_n = -\infty$

Beispiel: $a_n = (-1)^n$

$limsup \ a_n = +1, \ liminf \ a_n = -1$

Satz 2.6.4.: gegeben a_n und eine konvergente Teilfolge a_{n_k}

$\underset{n}{liminf} \ a_n \leq \underset{k}{lim} \ a_{n_k} \leq \underset{n}{limsup} \ a_n$

Beweis: $i_{n_k} \leq a_{n_k} \leq s_{n_k} \ \ /lim$

$lim \ i_{n_k} \leq lim \ a_{n_k} \leq lim \ s_{n_k} \quad \blacksquare$

Satz 2.6.5.: Sei $\{a_n\}$ eine Folge, dann existieren Teilfolgen die gegen $limsup \ a_n$ bzw. $liminf \ a_n$ konvergieren.

Satz 2.6.6.: Sei $\{a_n\}$ eine Folge, falls $limsup \ a_n = liminf \ a_n$ dann konvergiert $\{a_n\}$.

Beweis: $i_n \leq a_n \leq s_n \quad \blacksquare$

Bemerkung:

- $limsup(a_n + b_n) \leq limsup(a_n) + limsup(b_n)$
- $liminf(-a_n) = -limsup(a_n)$

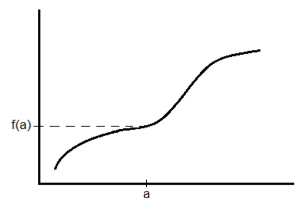
[30] $\frac{k}{4^k} = \frac{k}{2^k} \cdot \frac{1}{2^k}; \ k \leq 2^k$

3 Stetige Funktionen

3.1 Continuity

Definition 3.1.1.: Sei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $a \in D$[31]. Dann heißt f bei a stetig falls: $\forall\ \epsilon > 0 : \exists\ \delta > 0 :\mid f(x) - f(a) \mid < \epsilon$ falls $\mid x - a \mid < \delta$ und $x \in D$.

f heißt stetig, falls f stetig für alle $a \in D$



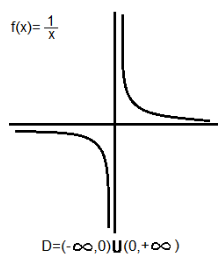
Beispiel: $f(x) = x^2$ ist stetig bei $a = 2$

$\mid f(x) - f(2) \mid = \mid x^2 - 4 \mid = \underbrace{\mid (x+2) \cdot (x-2) \mid}_{a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)} \leq ...$

Wähle $\mid x - 2 \mid \leq 1 \quad (1 \leq x \leq 3) \Rightarrow \mid x + 2 \mid \leq 5$

$...5 \cdot \mid x - 2 \mid < \epsilon$ falls $\mid x - 2 \mid < \delta$

$\epsilon > 0$ gegeben, wähle $\delta \leq \underbrace{\frac{\epsilon}{5}}_{\delta = min(1, \frac{\epsilon}{5})}$ und $\delta \leq 1$



Diese Funktion ist bei 0 nicht definiert, weswegen sie stetig über den ganzen Definitionsbereich ist.

Satz 3.1.5.: Sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $a \in D$, dann ist f stetig bei $a \Leftrightarrow (x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a))$; $\ lim\ f(x_n) = f(lim\ x_n)$

Beweis:

(Stetig $\Leftarrow$ Folgen): Wir zeigen aus nicht stetig $\Rightarrow$ nicht "Folge", $\exists\ x_n \to a : f(x_n) \to f(a)$

$\exists\ \epsilon > 0 : \forall\ \delta > 0 :\mid f(x) - f(a) \mid \geq \epsilon$

$\boxed{\text{Logik Einschub: } a \to b \Rightarrow \bar{b} \to \bar{a}}$

$\delta = \frac{1}{n} :\mid x_n - a \mid < \frac{1}{n} :\mid f(x_n) - f(a) \mid \geq \epsilon \Rightarrow f(x_n) \nrightarrow f(a)$ obwohl $x_n \to a$

(Stetig $\Rightarrow$ Folgen): $x_n \to a$ z.z.: $f(x_n) \to f(a)$ falls f stetig bei a

gegeben $\epsilon > 0 \quad \mid f(x_n) - f(a) \mid < \epsilon$

$\exists\ \delta :\mid x_n - a \mid < \delta \Rightarrow \exists\ N \Rightarrow$ konvergent ■

Beispiel: $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$

Satz 3.1.8.: Seien f, g stetig bei $a,\ c \in \mathbb{R}$

(a) $c \cdot f$ stetig bei a

(b) $f + g$ stetig bei a

(c) $\frac{f}{g}$ stetig bei a falls $g(a) \neq 0$

Beweis (c)[32]: $x_n \to a$, z.z. $f(x_n) \cdot g(x_n) \to f(a) \cdot g(a)$.

[31]Definitionsbereich

[32]Man kann auch den Grenzwertsatz verwenden

Wir dürfen $f(x_n) \to f(a)$ und $g(x_n) \to g(a)$ verwenden.

$f(x_n) \cdot g(x_n) - f(a) \cdot g(a) = f(x_n) \cdot g(x_n) - f(a) \cdot g(x_n) + f(a) \cdot g(x_n) - f(a) \cdot g(a) =$

$\underbrace{\underbrace{(f(x_n) - f(a))}_{\to 0} \cdot \underbrace{g(x_n)}_{\text{beschränkt da konvergent}}}_{\to 0} + \underbrace{f(a) \cdot \underbrace{(g(x_n) - g(a))}_{\to 0}}_{\to 0} \to 0 + 0 = 0$ ■

Satz: Jedes Polynom ist stetig

(i) $f(x) = x$ stetig

(ii) $f(x) = x^n$ stetig

Satz 3.1.10.: Sei g stetig bei a und f stetig bei $g(a)$. Dann ist $f \circ g$ stetig bei a.

Definition (Verkettung): $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ $\quad f(x) = \sqrt{x},\ g(x) = x^2 + 1;\ \ (f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 + 1}$[33]

Beweis: $x_n \to a,\ y_n := g(x_n) \to g(a)$

$f(y_n) = f(g(x_n)) \to f(g(a))$ ■

Beispiel: $f(x) = \begin{cases} 1+x^2 & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases} \quad D_f = \mathbb{R}$

Beispiel: $f(x) = \begin{cases} sin(\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad D_f = \mathbb{R} \quad g(x) = \begin{cases} x \cdot sin(\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

3.2 Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 3.2.1.: Sei f eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenem und beschränkten[34] Intervall I, dann ist f auf I beschränkt und nimmt ein Maximum und Minimum an.

Beweis: $M = \overset{sup}{I} f,\ M = \overset{sup}{I_1}$ oder $M = \overset{sup}{I_2}$

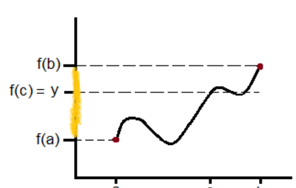
Wähle I_j mit $M = \overset{sup}{I_j}$, konstruiere $J_1 = I, J_2 = I_j, ...$ Folge von Intervallen mit

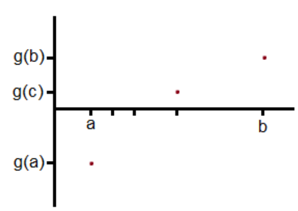
- Länge$(J_n) =$ Länge(J_1) $\frac{1}{2^{n-1}}$
- $J_{n+1} \subseteq J_n$
- $M = \overset{sup}{J_n} f$

$a \in \cap_n J_n$

Wähle $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists\ \delta$ mit $\mid f(x) - f(a) \mid < \epsilon$ falls $\mid x - a \mid < \delta$, $\ \exists\ n :$ Länge von $J_n < \delta$, $\quad \mid f(x) - f(a) \mid < \epsilon\ x \in J_n \Rightarrow$ $f(a) - \epsilon \leq M \leq f(a) + \epsilon\ \ \forall\ \epsilon > 0 \Rightarrow f(a) = M = \overset{sup}{I} f = \overset{max}{I} f$ ■

Satz 3.2.3. (Zwischenwertsatz): Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.





Beweis (Bisektionsverfahren): o.B.d.A. $y = 0$, weil $f(c) = y \Leftrightarrow \underbrace{f(c) - y = 0}_{g(c)}$, y muss zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegen. Satz 3.2.4.: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f([a, b])$ ein kompaktes Intervall.

Beweis: Nach Satz 3.2.1. existieren $M = \overset{max}{I} f$ und $m = \overset{min}{I} f \Rightarrow c, d \in I$ mit $f(c) = m$ und $f(d) = M$

$f(I) \subseteq [m, M]$ aus Satz 3.2.3. folgt $f(I) = [m, M]$ ■

Satz: f heißt strikt monoton $\begin{matrix}\text{fallend} \\ \text{steigend}\end{matrix}$ falls $\begin{matrix} x > y \\ x < y \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} f(x) > f(y) \\ f(x) < f(y) \end{matrix}$

[33] f ist das Grundgerüst, g ist die Füllung

[34] abgeschlossen + beschränkt = kompakt

Satz 3.2.5.: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ strikt monoton. Falls $f(I)$ ein Intervall ist, so ist f stetig.

Beweis: f strikt monoton steigend, $f(I) = [s,t]$

geg.: $c \in I,\ \epsilon > 0 \qquad f(c) - \epsilon \leq u \leq f(c) \leq v \leq f(c) + \epsilon$

$u = max(s, f(c) - \epsilon),\ v = min(t, f(c) + \epsilon)$

$\exists\ p : f(p) = u$ und $\exists\ q : f(q) = v$ da $u, v \in [s,t]$

$p < c < q, \quad \underbrace{f(p)}_{u} < f(c) < \underbrace{f(q)}_{v}$ falls u, v keine Randpunkte sind

$\Rightarrow$ Wähle $\delta = q - p$ ■

Satz 3.2.6.: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ strikt monoton und stetig. Dann ist die Umkehrfunktion ebenfalls stetig und monoton.

Beweis: $f(I) = J$ ist ein Intervall nach Satz 2.3.4. $\Rightarrow f^{-1} : J \to I$ ist strikt monoton und erfüllt $f^{-1}(J) = I \overset{\text{Satz 3.2.5.}}{\Longrightarrow} f^{-1}$ stetig. ■

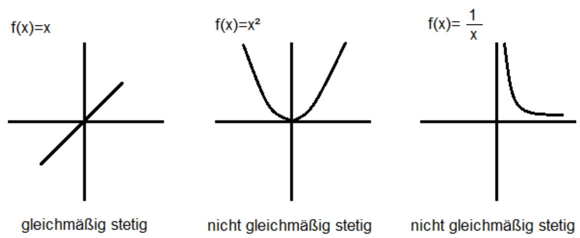
3.3 Gleichmäßige Stetigkeit

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig auf I.

Stetigkeit $\forall\ a \in I,\ \ \forall\ \epsilon > 0 \ \ \exists\ \delta > 0 :\mid f(x) - f(a) \mid < \epsilon \ \ \forall\ \mid x - a \mid < \delta$ (δ kann von a abhängen!)

Gleichmäßige Stetigkeit $\forall\ \epsilon > 0 \ \ \exists\ \delta > 0 \ \ \forall\ a \in I :\mid f(x) - f(a) \mid < \epsilon \ \ \forall\ \mid x - a \mid < \delta$ (δ unabhängig von a!)

Beispiel:



Satz 3.3.4.: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f sogar gleichmäßig stetig.

Beweis: Angenommen f ist nicht gleichmäßig stetig, dann $\exists\ \epsilon > 0,\ \exists\ c\ \forall\ \delta > 0 :\mid f(x) - f(c) \mid \geq \epsilon$ und $\mid x - c \mid < \delta$

$\Rightarrow \forall\ n :\ \exists\ x_n, c_n \in I$ mit $\mid x_n - c_n \mid < \frac{1}{n}$ und $\mid f(x_n) - f(c_n) \mid \geq \epsilon$, aus Bolzano-Weierstraß $\Rightarrow \exists$ konvergente Teilfolge x_{n_k}

$x_{n_k} \to x \in I,\ x_{n_k} - c_{n_k} \to 0 \Rightarrow c_{n_k} = \underbrace{x_{n_k}}_{\to x} + \underbrace{(c_{n_k} - x_{n_k})}_{\to 0} \to x$

$\mid f(x_{n_k}) - f(c_{n_k}) \mid \geq \epsilon \Rightarrow f(x_{n_k})$ und $f(c_{n_k}) \to x$ können nicht gegen die gleiche Zahl konvergieren $\Rightarrow f$ nicht stetig bei x ■

Satz 3.3.5.: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Dann bildet f eine Cauchy-Folge auf eine Cauchy-Folge ab.

Satz 3.3.6.: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig auf einem beschränkten Intervall. Dann kann f stetig auf die Randpunkte fortgesetzt werden, genau dann, wenn f gleichmäßig stetig ist.

3.4 Gleichmäßige Konvergenz

Funktionenfolgen $f_n(x) \quad n = 1, 2, 3, ...$

Beispiel: $f_n(x) = \frac{1}{n} \cdot x;\quad f_n(x) \sum\limits_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + ... + \frac{x^n}{n!}$

Definition: Sei f_n Folge von Funktionen $D \to \mathbb{R}$

(a) $f_n \to f$ punktweise falls für alle $x \in D : f_n(x) \to f(x)$

$\forall\ x \in D\ \forall\ \epsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N} :\mid f_n(x) - f(x) \mid < \epsilon\ \forall\ n > N$[35]

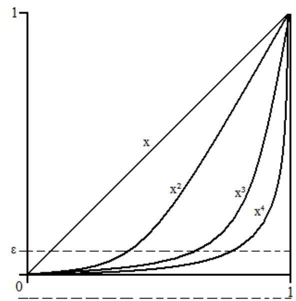
(b) $f_n \xrightarrow{\text{GLM}} f$ gleichmäßig

$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N}\ \forall\ x \in D :\mid f(x) - f_n(x) \mid < \epsilon\ \forall\ n > N$[36]

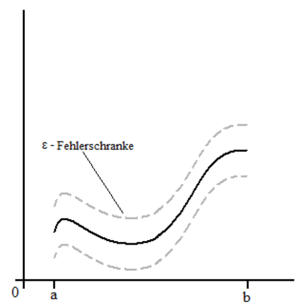
Wenn f_n gleichmäßig konvergent ist, dann ist es sowieso auch punktweise konvergent.

$f_n(x) = \frac{1}{n} \cdot x \quad D = [0,1], \quad f_n(x) \xrightarrow{\text{GLM}} 0 \quad \mid f_n(x) \mid \leq \frac{1}{n}$

$f_n(x) = x^n \quad D = [0,1), \quad f_n(x) \to 0$



$f_n(x) = x^n \quad D = [0,1], \quad f_n(x) \to \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$



Satz 3.4.4.: Sei $\{f_n\}$ eine Folge stetiger Funktionen $D \to \mathbb{R}$. Falls $f_n \xrightarrow{\text{GLM}} f$, dann ist auch f stetig.

Beweis: Sei $a \in D$, z.z. f ist stetig bei a.

geg. $\epsilon > 0 + \exists\ N :\mid f_n(x) - f(x) \mid < \frac{\epsilon}{3}$

$\exists\ \delta :\mid f_{N+1}(x) - f_{N+1}(a) \mid < \frac{\epsilon}{3}\ \forall\ \mid x - a \mid < \delta$

$\mid f(x) - f(a) \mid = f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a) \leq \underbrace{\mid f(x) - f_{N+1}(x) \mid}_{<\frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{\mid f_{N+1}(x) - f_{N+1}(a) \mid}_{<\frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{\mid f_{N+1}(a) - f(a) \mid}_{<\frac{\epsilon}{3}} <$

$\epsilon \quad \mid x - a \mid < \delta \quad \blacksquare$

Satz 3.4.6.: Sei $\{f_n\}$ Folge von Funktionen $D \to \mathbb{R}$. Falls $\mid f_n(x) - f(x) \mid \leq b_n\ \forall\ x \in D$ mit einer Nullfolge b_n gilt, dann $f_n \xrightarrow{\text{GLM}} f$

Bemerkung: $f_n \xrightarrow{(\text{GLM})} f \Leftrightarrow f_n - f \xrightarrow{(\text{GLM})} 0$ (gilt für gleichmäßig und punktweise).

Satz 3.4.7.: Sei $\{f_n\}$ Folge von Funktionen $D \to \mathbb{R}$. Falls $f_n \xrightarrow{\text{GLM}} 0$, dann gilt $f_n(x_n) \to 0$ für jede Folge von Punkten x_n.

Beispiel: $f_n(x) = \frac{n}{x+n} = \frac{1}{\frac{x}{n}+1} \to 1$

$x \geq 0, \quad \mid f_n(x) - 1 \mid = \frac{x}{x+n} \leq \frac{x}{n} \leq \frac{r}{n} \quad x \in [0,r]$

$x \in [0,\infty) \quad x_n = n \quad f_n(x_n) - 1 = \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2} \quad \lightning$

---

[35] N hängt sowohl von x als auch von ϵ ab

[36] N unabhängig von x, dadurch ist es gleichmäßig konvergent

4 Die Ableitung

4.1 Grenzwert von Funktionen

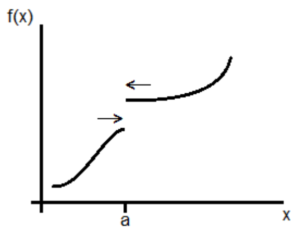
Definition 4.1.1.: Sei I ein offenes Intervall, a ein Punkt in I und $f : D \to \mathbb{R}$. Dann ist der Limes folgendermaßen definiert: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ falls $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 :\mid f(x) - L \mid < \epsilon$ für $x \in I$ und $0 <\mid x - a \mid < \delta$

Bemerkung 4.1.2.: f stetig bei $a \in D \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

Beispiel: $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$ $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) =?$

$(x^3 - 1) = (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1)$ $\quad f(x) = \frac{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}{(x-1)} = x^2 + x + 1$ $\quad \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1^2 + 1 + 1 = 3$

Definition 4.1.6. (einseitiger Grenzwert[37]): $\lim\limits_{x\to a^{\pm}}$[38] $f(x) = L$ falls $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 :\mid f(x) - L \mid < \epsilon$ für $a < x < a + \delta$ bzw. $a - \delta < x < a$



Satz 4.1.7.: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ und $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$

Beispiel: $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x<0 \\ sin(x), & x>0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} sin(x) = \underline{0}$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 1 - x = \underline{1}$

Definition: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = L\ :\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ m :\mid f(x) - L \mid < \epsilon$ für $\substack{x>m \\ x<m}$

Beispiel: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+3\cdot x+1}{2\cdot x^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2\cdot(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^2\cdot(2+\frac{1}{x^2})} = \frac{1}{2}$

Satz 4.1.10.: Sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ und sei $u = a^+$ oder b^-, weiters sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, dann gilt, dass $\lim\limits_{x\to u} f(x) = L \Leftrightarrow a_n \to u \Rightarrow f(a_n) \to L$ für alle Folgen $a_n \in (a, b)$

Satz 4.1.11.: Seien $\lim\limits_{x\to u} f(x) = K$ und $\lim\limits_{x\to u} g(x) = L$, $\quad u = a,\ a^+,\ a^-$

(a) $\lim\limits_{x\to u} c = c$

(b) $\lim\limits_{x\to u} c \cdot f(x) = c \cdot K$

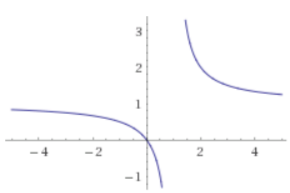
(c) $\lim\limits_{x\to u} (f(x) + g(x)) = K + L$

(d) $\lim\limits_{x\to u} (f(x) \cdot g(x)) = K \cdot L$

(e) $\lim\limits_{x\to u} (\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{K}{L}$ falls $L \neq 0$

Bemerkung: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$ und $\pm f(x) > 0$ in der Nähe von a

Beispiel: $f(x) = \frac{x}{x-1}$, $\quad \lim\limits_{x\to 1\pm} f(x) = \pm\infty$



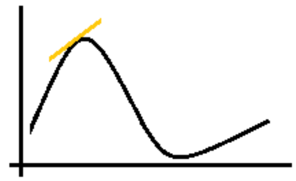
---

[37] von einer Seite annähern

[38] auch $a\pm$, $a + 0$ oder $0+$

4.2 Die Ableitung

Definition 4.2.1.: $f : D \to \mathbb{R}$ $\;a \in D$ heißt differenzierbar bei a falls $\underset{x \to a}{lim} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} := f'(a) \in \mathbb{R}$



Bemerkung: $f'(a) = \underset{h \to 0}{lim} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + (x-a) \cdot R(x)$

Definition: Rest $R(x) := \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)$, $\;\underset{x \to a}{lim} R(x) = 0$, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) + R(x)$

Beispiel:

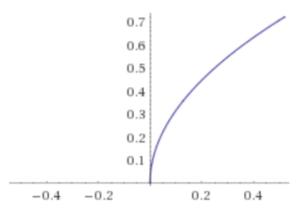
$f(x) = c \rightsquigarrow f'(x) = 0$

$f(x) = c \cdot x \rightsquigarrow f'(x) = \underset{h \to 0}{lim} \frac{c \cdot (x+h) - c \cdot x}{h} = \underset{h \to 0}{lim} \frac{c \cdot h}{h} = c$

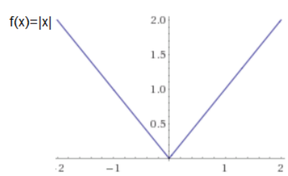
$f(x) = x^2 \rightsquigarrow f'(x) = \underset{h \to 0}{lim} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \underset{h \to 0}{lim} \frac{x^2 + 2 \cdot x \cdot h + h^2 - x^2}{h} = \underset{h \to 0}{lim} \frac{h \cdot (2 \cdot x + h)}{h} = \underset{h \to 0}{lim} 2 \cdot x + h = 2 \cdot x$

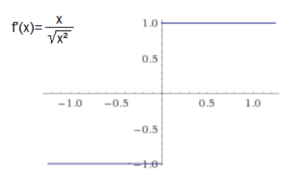
$f(x) = \sqrt{x} \rightsquigarrow f'(x) = \underset{h \to 0}{lim} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \underset{h \to 0}{lim} \frac{x+h-x}{h \cdot (\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \qquad x > 0$

$f'(0) \overset{?}{=} \underset{h \to 0}{lim} \frac{\sqrt{h}}{h} = \underset{h \to 0+}{lim} \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty$



$f'(0) \overset{?}{=} \underset{h \to 0}{lim} \frac{|h| - |0|}{h} = \underset{h \to 0}{lim} sign(h)$[39] divergent, existiert nicht





Satz 4.2.5.: Ist f differenzierbar bei a, dann ist f auch stetig bei a.

Beweis: $f(x) = f(a) + \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot (x-a)$, $\qquad \underset{x \to a}{lim} f(x) = \underbrace{\underset{x \to a}{lim} f(a)}_{f(a)} + \underbrace{\underset{x \to a}{lim} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{f'(a)} \cdot \underbrace{\underset{x \to a}{lim} (x-a)}_{0} = f(a)$

Satz 4.2.6.: Seien f, g differenzierbar bei a

(a) $(c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a)$

(b) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

(c) $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$

(d) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g(a)^2}$ falls $g(a) \neq 0$

Beweis: (c)

$\underset{x \to a}{lim} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x-a} = \underset{x \to a}{lim} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(x) + f(a) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x-a} = \underset{x \to a}{lim} \frac{g(x) \cdot (f(x)-f(a))}{x-a} + \frac{f(a) \cdot (g(x)-g(a))}{x-a} = \underset{x \to a}{lim} g(x) \cdot \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \underset{x \to a}{lim} f(a) \cdot \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g(x) \cdot \underset{x \to a}{lim} g(x) \cdot \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + f(a) \cdot \underset{x \to a}{lim} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$

[39] signum, $sign(x) = +1,\ x > 0;\ 0,\ x = 0;\ \ -1,\ x < 0$

(d) o.B.d.A. $f=1$ da $\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)' = f'\cdot\frac{1}{g} + f\cdot\left(\frac{1}{g}\right)'$

$$\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(a)}}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{g(a)-g(x)}{g(x)\cdot g(a)\cdot(x-a)} = \frac{1}{g(a)}\cdot\underbrace{\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}}_{\frac{1}{g(a)}}\cdot\underbrace{\lim_{x\to a}\frac{g(a)-g(x)}{x-a}}_{-g'(a)} = -\frac{g'(a)}{g(a)^2} \quad ■$$

Beispiel: $f(x)=x^n,\ f'(x)=n\cdot x^{n-1} \quad n\in\mathbb{N}_0$

Beweis mit Induktion:

IA: $n=0 \quad f(x)=x^0=1 \quad f'(x)=0\cdot\frac{1}{x}=0$

IS: $f(x)=x^{n+1} \quad f'(x)=(x\cdot x^n)'=1\cdot c^n+x\cdot(x^n)'=x^n+x\cdot n\cdot x^{n-1}=(1+n)\cdot x^n=(n+1)\cdot x^n$

Satz 4.2.7. (Kettenregel): f differenzierbar bei $g(a)$ und g differenzierbar bei a, $(f\circ g)'(a)=f'(g(a))\cdot g'(a)$

Beweis: $g(a)=b \quad h(y)=\begin{cases}\frac{f(y)-f(b)}{y-b}, & y\neq b\\ f'(b), & y=b\end{cases}$

f differenzierbar bei $b \Rightarrow h$ stetig bei b

$$\lim_{x\to a}\frac{f(g(x))-f(g(a))}{x-a} = \lim_{x\to a}\underbrace{\frac{f(g(x))-f(b)}{g(x)-b}}_{h(g(x))}\cdot\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \underbrace{\lim_{x\to a}h(g(x))}_{h(g(a))=h(b)=f'(b)}\cdot\underbrace{\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}_{g'(a)} = f'(g(a))\cdot g'(a)$$

Satz 4.2.9.: f sei strikt monoton auf I und differenzierbar bei a mit $f'(a)\neq 0$, dann ist die zugehörige inverse Funktion g differenzierbar bei $b=f(a)$ und $g'(b)=\frac{1}{f'(a)}=\frac{1}{f'(g(b))}$

Beweis: $x=g(y)\Rightarrow f(x)=y, \quad \frac{g(y)-g(b)}{y-b}=\frac{x-a}{f(x)-f(a)}=: h(x), \quad \lim_{x\to a}h(x)=\frac{1}{f'(a)}, \quad \frac{(g(y)-g(b)}{y-b}=h(g(y))$

$\lim_{y\to b}\frac{g(y)-g(b)}{y-b}=\lim_{y\to b}h(g(y))=h(a)=\frac{1}{f'(a)} \quad ■$

Beispiel: $f(x)=x^n,\ g(x)=\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}} \quad x>0; \quad f'(x)=n\cdot x^{n-1},\ g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}=\frac{1}{n\cdot(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}}=\frac{1}{n\cdot x^{\frac{n-1}{n}}}=\frac{1}{n\cdot x^{1-\frac{1}{n}}}=\frac{1}{n}\cdot x^{\frac{1}{n}-1}$

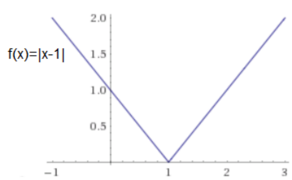
Korollar: $f(x)=x^{\frac{n}{m}}\Rightarrow f'(x)=\frac{n}{m}\cdot x^{\frac{n}{m}-1}; \quad x^{\frac{n}{m}}=(x^{\frac{1}{m}})^n$

4.3 Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$

Definition: Kritische Punkte von f $\begin{cases}① \text{ Randpunkte } a{,}b\\ ② \text{ Stationäre Punkte } c\in(a{,}b) \text{ mit } f'(c)=0\\ ③ \text{ Singuläre Punkte } c\in(a{,}b) \text{ an denen die Ableitung nicht existiert}\end{cases}$

Satz 4.3.1.: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Dann werden Minima und Maxima nur an kritischen Punkten angenommen.



Beispiel: $f(x)=|x-1|=\begin{cases}-x+1 & 0\leq x\leq 1\\ x-1 & 1\leq x\leq 3\end{cases}$

Kritische Punkte: $0,3,1$

$f'(x)=\begin{cases}-1 & 0\leq x<1\\ +1 & 1<x\leq 3\end{cases}$ Differentialquotient an der Stelle 1: $f'(1)\overset{?}{=}\lim_{x\to 1^{\pm}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\pm 1$ nicht differenziebar bei 1

$f(x)=1,2,0; \quad max$ bei 2, min bei 0

Beweis: Angenommen: f hat bei c ein max o.B.d.A.

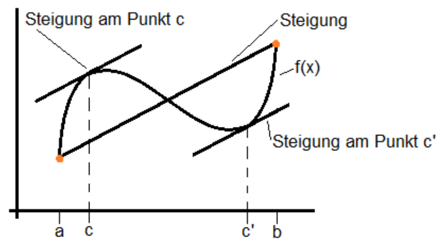
3 Fälle: 1) c am Rand ✓

2) c nicht differenzierbar ✓

z.z.: Falls weder 1) noch 2) $\Rightarrow c$ stationär, da c $max \Rightarrow f(x)\leq f(c),\ f(x)-f(c)\leq 0 \quad c\in(a,b)$ und es existiert $f'(c)$

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\begin{cases}\leq 0 & x>c\\ \geq 0 & x<c\end{cases}\Rightarrow\left.\begin{matrix}\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq 0\\ \lim_{x\to c^-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq 0\end{matrix}=f'(x)\right\}\Rightarrow f'(c)=0 \quad ■$$

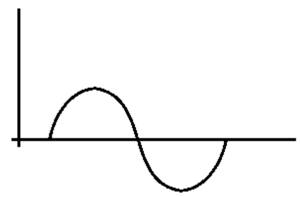
Satz 4.3.2. (Mittelwertsatz): Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a,b). Dann existiert (mindestens) ein $c\in(a,b)$ mit $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Die Steigung am Punkt c muss irgendwann wegen dem Zwischenwertsatz mit Steigung c' übereinstimmen

Beweis: $g(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)$

$s(x) = f(x) - g(x)$



z.z. $s'(c) = 0$ $(0 = f'(c) - g'(c))$

Fall 1) $s(x) \equiv 0$ ✓ (ganze Funktion identisch 0)[40]

2) $s(x)$ hat ein $max > 0$ oder $min < 0 \Rightarrow$ es existiert ein stationärer Punkt c ■

Satz 4.3.3.: Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt, falls $f'(x) \equiv 0$ $(\forall\ x \in (a,b))$, dass f konstant ist.

Beweis: $x, y \in (a,b)$ $x < y$

$0 = f'(c) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \Rightarrow f(y) = f(x)$ ■

Korollar 4.3.4.: Sei $f'(x) = g'(x)\ \forall\ x \in (a,b) \Rightarrow f(x) = g(x) + c$

Satz 4.3.5.: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar auf (a,b), $f'(x)\substack{>0\\<0}$ $\substack{\geq 0\\ \leq 0}$ auf $(a,b) \Rightarrow f$ (strikt) monoton $\substack{\text{steigend}\\ \text{fallend}}$ auf [a,b]

Beweis: $x, y \in [a,b]$ $x < y$; $0 \leqq f'(c) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \Rightarrow f(y) \geqq f(x)$ ■

Beispiel: $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3 \cdot x^2 \geq 0$; $f'(x) > 0 \begin{cases} x \in (-\infty, 0) \\ x \in (0, +\infty) \end{cases}$

f monoton steigend $(-\infty, 0]$ und $[0, +\infty)$

Satz 4.3.9.: Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ und es sei $|\ f'(x)\ | \leq M$ auf (a,b). Dann gilt, dass $|\ f(x) - f(y)\ | \leq M \cdot |\ x - y\ |$ $x, y \in (a,b)$, insbesondere ist f gleichmäßig stetig auf (a,b).

Beweis: $x, y \in (a,b)$, $o.B.d.A.\ x \neq y$, laut Mittelwertsatz $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c)$ $c \in (x,y)$

$|\ \frac{f(x)-f(y)}{x-y}\ | = |\ f'(c)\ | = \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} = |\ f'(c)\ | \leq M$

$f(x) - f(a) < \epsilon$ $\forall$ $|\ x - a\ | < \delta$, $\delta \frac{\epsilon}{M}$ da $|\ f(x) - f(a)\ | \leq M \cdot |\ x - a\ | < M \cdot \frac{\epsilon}{M} = \epsilon$ ■

Notiz:

- Eine Funktion die $|\ f(x) - f(y)\ | \leq M \cdot |\ x - y\ |$ $x, y \in (a,b)$ erfüllt heißt LIPSCHITZ-STETIG. (Lipschitz-stetig ist mehr als gleichmäßig stetig)
- Die Menge aller stetigen Funktionen I[41] $\to \mathbb{R}$ bezeichnet man mit $C(I)$[42] $(C((a,b)),\ C([a,b]))$
- $f \in C^1((a,b))$ falls f differenzierbar und $f' \in C((a,b))$[43]

[40] Funktion verschwindet an einem Punkt = Funktion = 0
[41] Intervall
[42] C für continous
[43] f' stetig

Beispiel für gleichmäßig stetig aber nicht Lipschitz-stetig: $f(x)\sqrt{x}$, $f'(x) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$

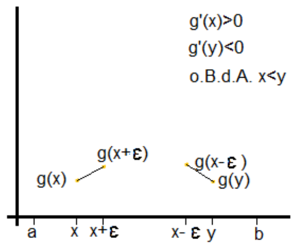
$\mid \sqrt{x} - \sqrt{0} \mid \leq M \cdot \mid x - 0 \mid \quad x > 0 \qquad \frac{1}{\sqrt{x}} \leq M$ ↯

4.4 Die Regeln von de l'Hôpital

Satz 4.4.1.: Seien $f,\ g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar auf (a,b), $g'(x) \neq 0$ auf (a,b). Dann existiert ein $c \in (a,b)$ mit $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Bemerkung: $g(x) = x \Rightarrow$ Mehrwertsatz

Beweis: Wie Beweis zu Satz 4.3.2.



Satz 4.4.3.: Seien $f,g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Falls (1) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to a^+} g(x)$ oder (2) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty = \lim\limits_{x\to a^+} g(x)$ $(= \lim\limits_{x\to a^+} \frac{f''(x)}{g''(x)})$, dann gilt $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (vorausgesetzt der rechte Grenzwert existiert). Analog für $x \to b^-$

Beweis: $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \quad x,y \in (a,b)$

$f(x) - f(y) = (g(x) - g(y)) \cdot \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad / : g(x)$

$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(y)}{g(x)} = (1 - \frac{g(y)}{g(x)}) \cdot \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad / + \frac{f(y)}{g(x)}$

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(y)}{g(x)} + (1 - \frac{g(y)}{g(x)}) \cdot \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad / - L$

$\frac{f(x)}{g(x)} - L = \frac{f(y)}{g(x)} + (1 - \frac{g(y)}{g(x)}) \cdot (\frac{f'(c)}{g'(c)} - L) - L\frac{g(y)}{g(x)}$

$\mid \frac{f(x)}{g(x)} - L \mid \leq \mid \frac{f(y)}{g(x)} \mid + \mid 1 - \frac{g(y)}{g(x)} \mid \cdot \mid \frac{f'(c)}{g'(c)} - L \mid + \mid L\frac{g(y)}{g(x)} \mid$

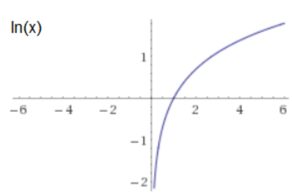
$\exists\ m : \quad \forall\ x \in (a,m) : \mid \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \mid < \frac{\epsilon}{6}$

Wähle $a < y < x < m \quad c \in (y,x) \Rightarrow c < m$ und betrachte Fall (1). Wähle y so klein, dass $\mid \frac{f(y}{f(x)} \mid < \frac{\epsilon}{3}$ und $\mid \frac{g(y)}{g(x)} \mid < min(1, \frac{\epsilon}{3\cdot|L|})$

$$\mid \frac{f(x)}{g(x)} - L \mid \leq \underbrace{\mid \frac{f(y)}{g(x)} \mid}_{<\frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{\mid 1 - \frac{g(y)}{g(x)} \mid}_{2} \cdot \underbrace{\mid \frac{f'(c)}{g'(c)} - L \mid}_{\leq\frac{\epsilon}{6}} + \underbrace{\mid L\frac{g(y)}{g(x)} \mid}_{\frac{\epsilon}{3}} < \epsilon$$

Analog Fall (2)[44]

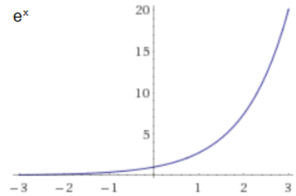
Beispiel: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{ln(x)}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{2\cdot x} = \frac{1}{2\cdot 1} = \frac{1}{2} \qquad ln'(x) = \frac{1}{x}$



$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2\cdot x}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0 \qquad (e^x)' = e^x$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^{a\cdot x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n\cdot x^{n-1}}{a\cdot e^{a\cdot x}} = ... = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n!}{a^n\cdot e^{a\cdot x}} = 0$

[44] x und y sind vertauscht



$\lim_{x\to\infty}\frac{5\cdot x^{28}+6\cdot x^{27}+\ldots}{e^{a\cdot x}}=0$

$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{r}{n})^n=?$ $r^{45}=1\%=0.01$ $ln(x^a)=a\cdot ln(x),\ e^x\equiv exp(x)$

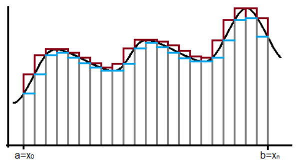
$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{r}{x})^x=\lim_{x\to\infty}exp(\underbrace{ln(1+\frac{r}{x})^x}_{x\cdot ln(1+\frac{r}{x})}$

$\lim_{x\to\infty}x\cdot ln(1+\frac{r}{x})=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\frac{1}{ln(1+\frac{r}{x})}}=\lim_{x\to\infty}\frac{ln(1+\frac{r}{x})}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\underbrace{\frac{\frac{1}{1+\frac{r}{x}}\cdot(-\frac{r}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}}}_{=\frac{r}{1+\frac{r}{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{r}{1+\frac{r}{x}}=r\Rightarrow\lim_{x\to\infty}exp(ln(1+\frac{r}{x})^x)=e^r$

[45] Zinssatz

5 Integration

5.1 Definition des Integrals



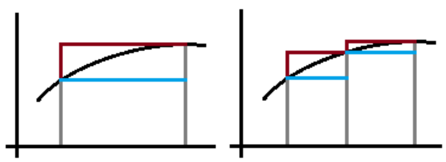
Definiton Partition von $[a,b]$: $P = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$

$\sum\limits_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k) \cdot (x_k - x_{k-1}), \quad \bar{x}_k \in [x_k, x_{k-1}]$ Riemann-Summe

U[46]$(f,P) = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \cdot (x_k - x_{k-1}) \qquad M_k = \underset{x \in [x_k, x_{k-1}]}{sup} f(x)$

L[47]$(f,P) = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \cdot (x_k - x_{k-1}) \qquad m_k = \underset{x \in [x_k, x_{k-1}]}{inf} f(x)$

$m_k \leq f(\bar{x}_k) \leq M_k \Rightarrow L(f,P) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) \leq U(f,P)$



Satz 5.1.4.: Seien Q, P Partitionen von $[a,b]$ mit $P \subset Q$, dann gilt: $L(f,P) \leq L(f,Q) \leq U(f,Q) \leq U(f,P)$

Satz 5.1.5.: Seien Q, P Partitionen von $[a,b]$, dann gilt: $L(f,P) \leq U(f,Q)$

Beweis: $P \cup Q \supset P, Q; \quad L(f,P) \leq L(f, P \cup Q) \leq U(f, P \cup Q) \leq U(f,Q)$ ■

Definition: $\int\limits_a^{\bar{b}} f \; dx = inf\{U(f,Q) \mid Q$ Partition von $[a,b]\}$

$\int\limits_{\underline{a}}^{b} f \; dx = sup\{L(f,Q) \mid Q$ Partition von $[a,b]\}$

Bemerkung: $\int\limits_{\underline{a}}^{b} f \; dx \leq \int\limits_a^{\bar{b}} f \; dx$

Definition 5.1.6.: Falls Ober- und Unterintegral übereinstimmen, dann heißt f (Riemann-)integrierbar über $[a,b]$ und wir schreiben $\int\limits_a^b f \; dx = \int\limits_{\underline{a}}^{b} f \; dx = \int\limits_a^{\bar{b}} f \; dx$.

Satz 5.1.7.: f ist (Riemann-)integrierbar genau dann, wenn für alle $\epsilon > 0$ eine Partition $P \subset [a,b]$ existiert mit $U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$

Beweis: f integrierbar, $I = \int\limits_a^b f(x) \; d(x) \qquad \underset{Q}{inf} U(f,Q) = I = \underset{P}{sup} L(f,P)$

$$\left.\begin{array}{l} \exists \; Q{:}0 \leq U(f,Q) - I < \epsilon \Rightarrow 0 \leq U(f, P \cup Q) - I < \epsilon \\ \exists \; P{:}0 \leq I - L(f,P) < \epsilon \Rightarrow 0 \leq I - L(f, P \cup Q) < \epsilon \end{array}\right\} 0 \leq U(f, P \cup Q) - I + I - L(f, P \cup Q) < 2 \cdot \epsilon$$

Falls $U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$, dann $\int\limits_{\underline{a}}^{b} f \; dx - \int\limits_a^{\bar{b}} f \; dx < \epsilon$ ■

Satz 5.1.8.: f ist (Riemann-)integrierbar genau dann, wenn eine Folge von Partitionen $\{P_n\}$ existiert mit $\underset{n \to \infty}{lim}(U(f,P_n) - L(f,P_n)) \to 0$. In diesem Fall gilt $\int\limits_a^b f(x) \; dx = \underset{n \to \infty}{lim} S_n(f)$, wobei $S_n(f)$ eine beliebige Riemannsumme zu P_n ist.

Beweis: f sei integrierbar. Nach Satz 5.1.7. existiert zu $\epsilon = \frac{1}{n}$ eine Partition P_n mit $U(f,P_n) - L(f,P_n) < \frac{1}{n}$ ✓

Umgekehrt: $lim \; U(f,P_n) - L(f,P_n) = 0 \Rightarrow \forall \; \epsilon > 0 \; \exists \; N$ mit $U(f,P_N) - L(f,P_N) < \epsilon \overset{\text{Satz 5.1.7.}}{\Longrightarrow} f$ integrierbar ■

[46] upper, Obersumme

[47] lower, Untersumme

Beispiel: $f(x) = x^2$ $[0,1]$ $(\int\limits_0^1 x^2\ dx = \frac{x^3}{3}\ |_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3})$

$P_n = \{0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < ... < \frac{n}{n} = 1\}$

$U(f,P_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} (\frac{k}{n})^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} k^2$

$L(f,P_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} (\frac{k-1}{n})^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} (k-1)^2 = \frac{1}{n^3} \sum\limits_{\underline{k=0}}^{n-1} k^2 = ...$

$U(f,P_n) - L(f,P_n) = \frac{n^2 - 0^2}{n^2} = \frac{1}{n}, \quad \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{6}$

$... = \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)\cdot(n)]cdot(2\cdot n-1)}{6} = \frac{(1-\frac{1}{n})\cdot(2-\frac{1}{n})}{6} = \frac{1\cdot 2}{6} = \frac{1}{3}$ ✓

5.2 Existenz Sätze und Eigenschaften

Satz 5.2.1.: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und monoton, dann ist f integrierbar.

Beweis: P_n Zerlegung in n Teilintervalle der Länge $\frac{1}{n}$, f monoton steigend, $\{x_0 < ... < x_n\}$ $x_k = a + \frac{k}{n} \cdot (b-a)$

$$\left.\begin{array}{l} U(f,P_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k) \\ L(f,P_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\cdot(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n} \sum\limits_{\underline{k=0}}^{n-1} f(x_k) \end{array}\right\} U(f,P_n) - L(f,P_n) = \frac{b-a}{n} \cdot (f(b) - f(a)) \to 0 \quad \blacksquare$$

Satz 5.2.2.: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist f integrierbar.

Beweis: Nach Satz 3.3.4. ist f sogar gleichmäßig stetig. $\forall\ \epsilon > 0\quad \exists\ \delta > 0 :|\ f(x) - f(y)\ |< \frac{\epsilon}{b-a}$ für $|\ x - y\ |< \delta$. Sei $P = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ mit $max\ x_k - x_{k-1} < \delta$

$U(f,P) - L(f,P) = \sum\limits_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \cdot (x_k - x_{k-1} < \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\epsilon}{b-a} \cdot (x_k - x_{k-1}) = \epsilon \overset{\text{Satz 5.1.7.}}{\Rightarrow} f$ ist integrierbar $\quad \blacksquare$

Linearität des Integrals

Satz 5.2.3.: Sei $f,\ g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, $c \in \mathbb{R}$

(a) $c \cdot f$ ist integrierbar und $\int\limits_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int\limits_a^b f(x)dx$

(b) $f + g$ ist integrierbar und $\int\limits_a^b (f+g)(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$

Beweis: $P = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$, $\quad I_k = [x_{k-1}, x_k]$

für $c \cdot f$:

$\underset{I_k}{sup}\, c \cdot f(x) = c \cdot \underset{I_k}{sup}\, f(x) \quad c \geq 0$

$\underset{I_k}{sup}\, (-f(x)) = -\underset{I_k}{inf}\, f(x)$

$U(c \cdot f, P) = c \cdot U(f,P) \quad c \geq 0$

$L(c \cdot f, P) = c \cdot L(f,P) \quad c \geq 0$

$U(-f,P) = -L(f,P),\ L(-f,P) = -U(f,P) \quad c < 0$

f integrierbar $\Leftrightarrow P_n$ mit $U(f,P_n) - L(f,P_n) \to 0$

$c \cdot f:\ U(c \cdot f, P_n) - L(c \cdot f, P_n) = c \cdot (\underbrace{U(f,P_n) - L(f,P_n)}_{\to 0}) \to 0 \quad c \geq 0 \Rightarrow c \cdot f$ integrierbar

$\int\limits_a^b f(x)dx = \underset{n\to\infty}{lim} U(c \cdot f, P_n) = \underset{n\to\infty}{lim} c \cdot U(f,P_n) = c \cdot \underset{n\to\infty}{lim} U(f,P_n) = c \cdot \int\limits_a^b f(x)dx \quad c \geq 0$

$-f:\ U(-f,P_n) - L(-f,P_n) = \underbrace{-L(f,P_n) - (-U(f,P_n))}_{-L+U} = \underbrace{U(f,P_n) - L(f,P_n)}_{\to 0} \to 0$

$\int\limits_a^b f(x)dx = \underset{n\to\infty}{lim} U(-f,P_n) = \underset{n\to\infty}{lim} - U(f,P_n) = -\underset{n\to\infty}{lim} U(f,P_n) = -\int\limits_a^b f(x)dx$

für $f + g$:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{I_k}{sup}(f(x)+g(x)) \le \underset{I_k}{sup} f(x)+\underset{I_k}{sup} g(x) \\ \underset{I_k}{inf}(f(x)+g(x)) \ge \underset{I_k}{inf} f(x)+\underset{I_k}{inf} g(x) \end{array}\right\} \text{ Satz 1.5.10.}$$

$\underset{I_k}{inf} f + \underset{I_k}{inf} g \le \underset{I_k}{inf}(f+g) \le \underset{I_k}{sup}(f+g) \le \underset{I_k}{sup} f + \underset{I_k}{sup} g$

$L(f,P)+L(g,P) \le L(f+g,P) \le U(f+g,P) \le U(f,P)+U(g,P) \le$

$0 \le U(f+g,P)-L(f+g,P) \le U(f,P)+U(g,P)-L(f,P)-L(g,P) = ((U(f,P)-L(f,P))+(U(g,P)-L(g,P)))$

$$\begin{array}{ll} \exists\ P_n & U(f,P_n)-L(f,P_n)\to 0 \\ \exists\ Q_n & U(f,Q_n)-L(f,Q_n)\to 0 \end{array} \underbrace{P_n \cup Q_n}_{=:R_n} \Rightarrow \begin{array}{l} U(f,R_n)-L(f,R_n)\to 0 \\ U(g,R_n)-L(g,R_n)\to 0 \end{array}$$

$0 \le U(f+g,R_n)-L(f+g,R_n) \le U(f,R_n)+U(g,R_n)-L(f,R_n)-L(g,R_n) = (\underbrace{(U(f,R_n)-L(f,R_n))}_{\to 0}+\underbrace{(U(g,R_n)-L(g,R_n))}_{\to 0}) \to$

$0 \Rightarrow f+g$ integrierbar

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \lim_{n\to\infty} \begin{array}{l} U(f+g,R_n) \le \lim_{n\to\infty} U(f,R_n)+\lim_{n\to\infty} U(g,R_n) = \int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx \\ L(f+g,R_n) \ge \lim_{n\to\infty} L(f,R_n)+\lim_{n\to\infty} L(g,R_n) = \int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx \end{array} \qquad \blacksquare$$

Satz 5.2.4.: Sei $f,\ g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $f(x) \le g(x)$ für alle $x \in [a,b]$, dann gilt $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

Beweis: $h(x) \ge 0 \Rightarrow \int_a^b h(x)dx \ge 0;\ h(x) = g(x)-f(x) \ge 0 \to \int_a^b (g(x)-f(x))dx \ge 0\ \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \ge 0 \quad \blacksquare$

Korollar 5.2.5.: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und es sei $m = \underset{[a,b]}{inf} f,\ M = \underset{[a,b]}{sup} f$, dann folgt $m\cdot(b-a) \le \int_a^b f\ dx \le M\cdot(b-a)$

Beweis: $m \le f \le M$

$$\underbrace{\int_a^b m\ dx}_{m\cdot(b-a)} \le \int_a^b f(x)dx \le \underbrace{\int_a^b M\ dx}_{M\cdot(b-a)} \qquad \blacksquare$$

Satz 5.2.6.: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, dann ist auch $\mid f \mid$ integrierbar und $\mid \int_a^b f(x)\ dx \mid \le \int_a^b \mid f(x) \mid dx$

Beweis: z.z.: $\mid f \mid$ ist integrierbar; $\mid f(x) \mid - \mid f(y) \mid \le \mid f(x)-f(y) \mid$

$\Rightarrow \underset{I}{sup} \mid f \mid - \underset{I}{inf} \mid f \mid \le \underset{I}{sup} f - \underset{I}{inf} f, \quad I \subseteq [a,b]$

$\underset{x,y\in I}{sup} f(x)-f(y) \le \underset{x\in I}{sup} f(x) + \underset{y\in I}{sup}(-f(y)) = \underset{I}{sup} f - \underset{I}{inf} f$

$\underset{x,y\in I}{sup} -f(x)+f(y) \le -inf \underset{I}{inf} f + \underset{I}{sup} f$

$\Rightarrow \mid (f(x)-f(y) \mid \le \underset{I}{sup} f - \underset{I}{inf} f$

$\Rightarrow \mid f(x) \mid - \mid f(y) \mid \le \underset{I}{sup} f - \underset{I}{inf} f$

$\underset{x,y\in I}{sup} \mid f(x)-f(y) \mid \le \underset{I}{sup} f - \underset{I}{inf} f$

$\underset{I}{sup} \mid f \mid - infI \mid f \mid \le \underset{I}{sup} f - \underset{I}{inf} f$

$\underset{I}{sup} \mid f \mid - \underset{I}{inf} \mid f \mid \le \underset{I}{sup} f - \underset{I}{inf} f \checkmark$

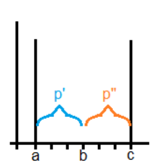
$U(\mid f \mid, P) - L(\mid f \mid, P) \le U(f,P) - L(f,P)$

$\exists\ U(\mid f \mid, P_n) - L(\mid f \mid, P_n) \le U(f,P_n) - L(f,P_n) \to 0$

$\to U(\mid f \mid, P_n) - L(\mid f \mid, P_n) \to 0 \Rightarrow \mid f \mid$ integrierbar $\quad \blacksquare$

Satz 5.2.7.: Sei $a \le b \le c$ und $f : [a,c] \to \mathbb{R}$ sei beschränkt. $\underline{\int_a^c} f(x)\ dx = \underline{\int_a^b} f(x)\ dx + \underline{\int_b^c} f(x)\ dx$ und analog für Oberintegrale.

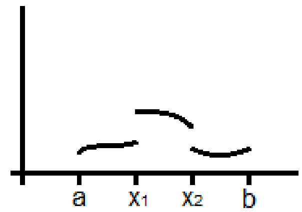
Beweis: P mit $b \in P$, $P = \underbrace{P'}_{\text{Partition } [a,b]} \cup \underbrace{P''}_{\text{Partition } [b,c]}$ mit $P' = P \cap [a,b]$ und $P'' - P \cap [b,c]$



$\overset{U}{L}(f,P) = \overset{U}{L}(f,P') + \overset{U}{L}(f,P'')$ $\quad \int\limits_a^{\bar c} f(x)\ dx = \inf\limits_P U(f,P) \le \inf\limits_P U(f,P) \cup \mid b \mid = \inf\limits_{P,\ b\in P} U(f,P) = \inf\limits_{P',P''} U(f,P') + U(f,P'') = \inf\limits_{P'} U(f,P') + \inf\limits_{P''} U(f,P'') = \int\limits_a^{\bar c} f(x)\ dx + \int\limits_b^{\bar c} f(x)\ dx \quad \blacksquare$

Korollar 5.2.8.: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar auf $[a,b]$ und $[b,c]$, dann ist $\int\limits_a^c f(x)\ dx = \int\limits_a^b f(x)\ dx + \int\limits_b^c f(x)\ dx$

Bemerkung: Falls $f : [a,b]$ stückweise stetig ist, dann ist f integrierbar, $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ mit $f : (x_k, x_{k-1}) \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig.



Satz 5.2.9.: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann $\exists\ c \in [a,b]$ mit $f(c) = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)\ dx$

5.3 The Fundamental Theories of Calculus

Satz 5.3.1.: Sei $f : [a,b] \to$ stetig und differenzierbar (a,b) mit f' integrierbar auf $[a,b]$ (z.B.: $f'(a) = f'(b) = 0$). Dann $\int\limits_a^b f'(x)\ dx = f(b) - f(a)$.

Beweis: $P = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$, $\quad f'(c_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) = f(x_k) - f(x_{k-1})$[48] $\quad I_k = [x_{k-1}, x_k]$

$\sum\limits_{k=1}^n f'(c_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) = \sum\limits_{k=1}^n f(x_k) - f(x_{k-1}) = f(b) - f(a); \quad L(f', P_n) \le f(b) - f(a) \le U(f', P_n) \quad / \ n \to \infty$

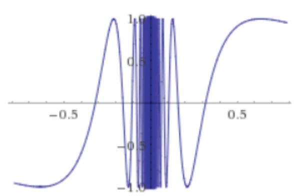
$\int\limits_a^b f'(x)\ dx \le f(b) - f(a) \le$[49] $\int\limits_a^b f'(x)\ dx \quad \blacksquare$

Beispiel:

$[0,1] \quad f(x) = \left\{ x^2 \cdot sin(\frac{1}{x}), \quad x \neq 0 \ \ 0, \quad x = 0 \right.$

f stetig $\left\{ \begin{array}{l} (0,1] \quad \text{klar} \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 \equiv f(0) \end{array} \right.$

$(0,1] \quad f'(x) = \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot x \cdot sin(\frac{1}{x}) - cos(\frac{1}{x}) \quad x \in (0,1] \\ 0 \quad x = 0 \end{array} \right.$



Notation: $\int\limits_a^a f(x)\ dx = 0, \quad \int\limits_a^b f(x)\ dx = -\int\limits_b^a f(x)\ dx$

Satz 5.3.3.: f sei integrierbar auf $[b,c]$. Für $a, x \in [b,c]$ definiere $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\ dt$. Dann gilt F ist stetig auf $[b,c]$ und an jedem Punkt x an dem f stetig ist, ist F sogar differenzierbar mit $F'(x) = f(x)$.

Beweis f integrierbar $\Rightarrow \mid f(t) \mid \le M$

$F(y) - F(x) = \int\limits_a^y f(t)\ dt - \int\limits_a^x f(t)\ dt = \int\limits_x^y$

$\mid F(y) - F(x) \mid = \mid \int\limits_x^y f(t)\ dt \mid \le \int\limits_x^y \mid f(t) \mid \ dt \le M \cdot \mid x - y \mid \Rightarrow$ gleichmäßig stetig

$\frac{F(x)-F(y)}{x-y} - f(y) \ \overrightarrow{x \to y}\ 0$ falls f stetig bei y

[48] Mittelwertsatz
[49] Teleskopsumme

$\frac{1}{y-x}\int\limits_x^y f(t)\ dt - f(y) = \frac{1}{y-x}\int\limits_x^y f(t)\ dt - \frac{1}{y-x}\int\limits_x^y f(y)\ dt = \frac{1}{y-x}\int\limits_x^y (f(t)-f(y))\ dt$ f stetig bei $y:\ \forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 :\mid f(x) - f(y) \mid < \epsilon$ für $\mid x-y \mid < \delta \Rightarrow \mid \frac{1}{y-x}\int\limits_x^y f(t)\ dt - f(y) \mid \leq \frac{1}{y-x} \mid \int\limits_x^y \underbrace{f(t)-f(y)}_{<\epsilon}\ dt \mid < \epsilon\quad t \in \begin{cases} [x,y], & x \leq y \\ [y,x], & y \leq x \end{cases}\quad \mid x-y \mid < \delta \Rightarrow \mid t-y \mid < \delta$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to y} \frac{1}{y-x}\int\limits_x^y f(t)\ dt = f(y) \Leftrightarrow F'(y) = f(y)\quad \blacksquare$

Beispiel: $\frac{d}{dx}\int\limits_0^{sin(x)} e^{-t^2}\ dt = \frac{d}{dx} erf(sin(x)) = -erf'(sin(x)) \cdot c(x) = e^{-sin(x)^2} \cdot cos(x),\ erf := \int\limits_0^x e^{-t^2}\ dt,\quad erf'(x) = e^{-x^2},\quad erf(0) = 0$

Satz 5.3.6. (Substitutionsregel): Sei $g: I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit g' integrierbar und $J - g(I)$. Sei $f: J \to \mathbb{R}$ stetig, dann gilt $\int\limits_a^b f(g(t)) \cdot g'(t)\ dt = \int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(u)\ du$ für $a, b \in I$.

Bemerkung: $\int f(u)\ du = \int f(u) \cdot u'\ dx;\ u = u(x),\ du = u' \cdot dx,\ du = \frac{du}{dx} \cdot dx$

Beweis: $\left.\begin{matrix} f \circ g \text{ stetig} \\ g' \text{ integrierbar} \end{matrix}\right\} \Rightarrow (f \circ g) \cdot g'$ integrierbar

Setze $F(v) := \int\limits_{g(a)}^{v} f(u)\ du$, es gilt $F'(v) = f(v)$

$\stackrel{\text{Kettenregel}}{\Longrightarrow} (F(g(x)))' = f(g(x)) \cdot g'(x)$

$F(g(b)) - F(g(a)) = \int\limits_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\ dx$

$\int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(u)\ du - 0 = \int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(u)\ du\quad \blacksquare$

Satz 5.3.7. (Partielle Integration): Seien $f,\ g: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a,b) und f', g' integrierbar auf $[a,b]$. Dann sind $f' \cdot g$ und $f \cdot g'$ integrierbar und es gilt $\int\limits_a^b f(x) \cdot g'(x)\ dx = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int\limits_a^b f'(x) \cdot g(x)$

Beweis: $\int\limits_a^b (f \cdot g)'\ dx = \int\limits_a^b (f' \cdot g + g' \cdot f)\ dx,\ f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) = \int\limits_a^b f' \cdot g\ dx + \int\limits_a^b f \cdot g'\ dx\quad \blacksquare$

Beispiel:

$\int 1 \cdot ln(x)\ dx = x \cdot ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\ dx = x \cdot ln(x) - \int 1\ dx = x \cdot ln(x) - x$

$\int x^2 \cdot sin(x)\ dx = -x^2 \cdot cos(x) + \int 2 \cdot x \cdot cos(x)\ dx = ...$

5.4 LOG, EXP, uneigentliche Integrale

Definition 5.4.1.: $ln(x) := \int\limits_1^x \frac{1}{y}\ dy \Leftrightarrow ln(1) = 0$ und $ln'(x) = \frac{1}{x}\quad x \in (0, \infty)$.

Bemerkung: $(ln \mid x \mid)' = \frac{1}{x}\quad x \neq 0$

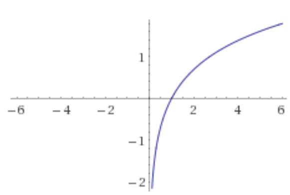
Satz: Seien $a,\ b > 0:\ ln(a \cdot b) = ln(a) + ln(b)$.

Beweis: $ln(a \cdot x) = ln(a) + ln(x),\quad (ln(a \cdot x))' = (ln(a) + ln(x))'$

$(ln(a \cdot x))' = \frac{1}{a \cdot x} \cdot a = \frac{1}{x}\quad \blacksquare$

Satz 5.4.4.: $ln(x)$ ist monoton steigend mit $\lim\limits_{x \to 0} ln(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to \infty} ln(x) = +\infty$

Beweis: $ln'(x) = \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow$ streng monoton steigend ($ln(x) > 0\ \ x > 1$ und $ln(x) < 0\ \ x < 1$)



$x = 2^m \Rightarrow ln(x) = m \cdot \underbrace{ln(2)}_{>0} \stackrel{\to}{m \to \infty} \infty$

$(0 = ln(1) = ln(x \cdot \frac{1}{x}) = ln(x) + ln(\frac{1}{x})\quad ln(\frac{1}{x}) = -ln(x)\quad \blacksquare$

Exponentialfunktion

Definition 5.4.5.: $exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ mit $exp = ln^{-1}$, das heißt $exp(ln(x)) = x \quad x \in (0, \infty)$ und $ln(exp(y)) = y \quad y \in \mathbb{R}$

Satz 5.4.6.: Die Exponentialfunktion ist differenzierbar (insbesondere stetig) und es gilt $exp'(x) = exp(x)$.

Beweis: $exp'(x) = \frac{1}{ln'(exp(x))} = exp(x)$ nach Satz 4.2.9. ■

Satz 5.4.7.:

(a) $exp(a + b) = exp(a) \cdot exp(b)$

(b) $exp(r \cdot a) = (exp(a))^r \quad a > 0,\ r \in \mathbb{Q}$

Beweis: $x = exp(a),\ y = exp(b)$

(a) $exp(a + b) = exp(ln(x) + ln(y)) = exp(ln(x \cdot y)) = x \cdot y = exp(a) \cdot exp(b)$ ✓

(b) $exp(0) = 1,\ n \in \mathbb{N}_0 \quad exp(n \cdot a) = (exp(a))^n$

$1 = exp(a - a) = exp(a) \cdot exp(-a) \Rightarrow exp(-a) = \frac{1}{exp(a)} \quad n \in \mathbb{Z}$

$exp(a) = exp(\frac{1}{2} \cdot a + \frac{1}{2} \cdot a) = exp(\frac{1}{2} \cdot a)^2, \quad exp(\frac{1}{m} \cdot a) = (exp(a))^{\frac{1}{m}} \quad m \in \mathbb{N}$

$exp(\frac{n}{m} \cdot a) = (exp(a))^{\frac{n}{m}}$ ■

Bemerkung (Satz 5.4.3.): $ln(a^r) = r \cdot ln(a) \quad a > 0,\ r \in \mathbb{Q}$

Definition 5.4.8.: Sei $b \in \mathbb{R}$ und $a > 0$

$a^b := exp(b \cdot ln(a))$

$e := exp(1),\ ln(e) = 1,\ e^x = exp(x)$

$a^{x+y} = a^x \cdot a^y,\ a^{x \cdot y} = (a^x)^y \quad a > 0,\ x, y \in \mathbb{R}$

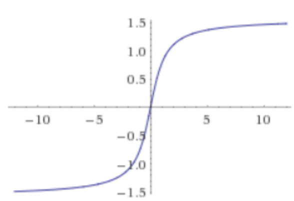
$log_a(x) = \frac{ln(x)}{ln(a)},\ a^{log_a(x)} = x, \quad x > 0$

Uneigentliche Integrale

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\ dx, \quad \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\ dx = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\ dx + \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\ dx$$

Nenne b singulär falls $\begin{matrix} \text{(i)} & b = \infty \text{ oder} \\ \text{(ii)} & f \text{ unbeschränkt bei } b \end{matrix}$. Definiere $\int\limits_a^b f(x)\ dx = \lim\limits_{c \to b} \int\limits_a^c f(x)\ dx$ falls dieser Grenzwert existiert.[50]

Beispiel: $\int\limits_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\ dx = \lim\limits_{c \to \infty} \int\limits_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\ dx = \lim\limits_{c \to \infty} [arctan(x)]_0^c = \lim\limits_{c \to \infty} arctan(c) = \frac{\pi}{2}$ ✓



$$\int\limits_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\ dx = \lim\limits_{c \to \infty} \int\limits_0^c \frac{x}{1+x^2}\ dx = \lim\limits_{c \to \infty} [\frac{1}{2} \cdot ln(1 + x^2)]_0^c = \lim\limits_{c \to \infty} \frac{1}{2} \cdot ln(1 + c^2) = \infty$$

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x}\ dx = \lim\limits_{c \to \infty} ln(c) = \infty, \quad a > 1 \quad \int\limits_1^\infty \frac{1}{x^a}\ dx = \lim\limits_{c \to \infty} \frac{1}{1-a} \cdot x^{1-a}\ |_1^c = \lim\limits_{c \to \infty} \frac{1}{1-a} \cdot (c^{1-a} - 1) = \frac{1}{a-1}$$

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx = \lim\limits_{c \to 0} \int\limits_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx = \lim\limits_{c \to 0} [2 \cdot \sqrt{x}]_c^1 = \lim\limits_{c \to 0} [2 - 2 \cdot \sqrt{c}] = 2$$

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = \lim\limits_{a \to \infty} \int\limits_{-a}^{+a} f(x)\ dx$ Cauchy'scher Hauptwert

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\ dx = \lim\limits_{a \to \infty} \underbrace{\int\limits_{-a}^{+a} \frac{x}{1+x^2}\ dx}_{=0} = 0$$

[50] Gilt auch für die untere Grenze a, d.h. c geht gegen die untere Grenze a

6 Unendliche Reihen

6.1 Convergence of Infinite Series

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + ...$ $\quad \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k := \lim\limits_{n \to \infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k}_{\text{Teilsummen } s_n}$

Bemerkung: Seien $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k + \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k, \quad c \in \mathbb{R} \; \sum\limits_{k=1}^{\infty} c \cdot a_k = c \cdot \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$

Satz 6.1.2.: Falls $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent ist, dann müssen die Glieder a_k eine Nullfolge bilden.

Beweis: $a_n = s_n - s_{n-1} \quad \lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim\limits_{n \to \infty} s_n - \lim\limits_{n \to \infty} s_{n-1} = 0 \quad \blacksquare$

Beispiel:

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2 \cdot k+1} =? \quad a_k = \frac{k}{2 \cdot k+1} = \frac{1}{2+\frac{1}{k}} \to \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow$ divergent

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} =? \quad a_k = \frac{1}{k} \to 0$ trotzdem divergent!

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a \cdot r^k = a + a \cdot r + a \cdot r^2 + ...$ Geometrische Reihe

Satz 6.1.6.: Falls $a \neq 0$ und $r \in \mathbb{R}$, dann konvergiert die geometrische Reihe gegen $\frac{a}{1-r}$ falls $\mid r \mid < 1$ ist und divergiert für $\mid r \mid \geq 1$.

Beweis: $a_k = a \cdot r^k \quad a_k \to 0$ genau dann wenn $\mid r \mid < 1$

$s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a \cdot r^k = a \cdot \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \to a \cdot \frac{1}{1-r} \quad \blacksquare$

Satz: Gilt $a_n \geq 0$ so konvergiert s_n genau dann, wenn s_n beschränkt ist.

Beweis: $a_k \geq 0 \leftrightarrow s_n$ monoton steigend. $\blacksquare$

Satz 6.1.9. (Vergleichstest): Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ eine konvergente Reihe und $\mid a_k \mid \leq M \cdot b_k \;\; \forall\, k \geq N$, dann konvergiert auch $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Beweis: $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k, \quad t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k, \quad n, m \geq N$

$\mid s_m - s_n \mid = \mid \sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k \mid \leq \sum\limits_{k=n+1}^{m} \mid a_k \mid \leq M \cdot \sum\limits_{k=n+1}^{m} b_k \leq M \cdot (t_m - t_n) < ...$

Voraussetzung: t_n *Cauchy* $\Leftrightarrow \; \forall\, \frac{\epsilon}{M} > 0 \; \exists\, \tilde{M} :\mid t_m - t_n \mid < \frac{\epsilon}{M} \;\; \forall\, m, n > \tilde{M}$

z.z.: s_n *Cauchy* $\Leftrightarrow \; \forall\, \epsilon > 0 \; \exists\, \tilde{N} :\mid s_m - s_n \mid < \epsilon \;\; \forall\, m, n > \tilde{N}$, wähle $\tilde{N} = max(\tilde{M}, N)$

$... < M \cdot \frac{\epsilon}{M} = \epsilon \quad \blacksquare$

Korollar 6.1.10.: Falls $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mid a_k \mid$ konvergiert, so auch $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Definition 6.1.11.: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, falls $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mid a_k \mid$ konvergiert.

Bemerkung: Falls $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ divergent und $0 \leq b_k \leq m \cdot a_k \quad k \geq N$ gilt, dann ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

Beispiel:

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{k}{2^{\frac{k}{2}}}}_{\leq M} \cdot \underbrace{\frac{k}{2^{\frac{k}{2}}}}_{\text{geom. Reihe}} \leq M \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{sqrt2}} \quad b_k = M \cdot \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}} \quad \lim\limits_{k \to k} \frac{k}{r^k} \to 0 \quad r > 1$ (de l'Hôpital)

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot k}{2^k} \rightsquigarrow$ absolut konvergent

$\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}}_{\text{divergent}} \frac{k}{k^2+1}, \; a_k = \frac{\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k^2}} \to 0$

$= \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{k^2}} \geq \underbrace{\frac{1}{2^k}}_{\text{divergent}}$

6.2 Tests for Convergence

Satz 6.2.1.: Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ positiv, monoton fallend mit $a_k = f(k),\ k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent $\Leftrightarrow \int\limits_1^{\infty} f(x)\ dx$ konvergiert.

Beweis: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 1$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k},\ f(x) = \frac{1}{x}$

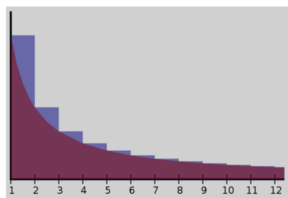
$\int\limits_1^{c} \frac{1}{x} = ln(c) \to \infty$

H_n[51] $= \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad s_n = H_n - ln(n+1)$

$a_k = s_k - s_{k-1} = \frac{1}{k} - ln(k+1) + ln(k) = \frac{1}{k} - ln(\frac{k+1}{k})$

$\int\limits_1 n(\frac{1}{x} - ln(x+1) + ln(x))\ dx$

$lim\ H_n - ln(n) = \gamma$, Euler-Mascheroni-Konstante



$s_{n-1} - 1 \leq \int\limits_1^{n} f(x)\ dx \leq s_n \quad \blacksquare$

Beispiel:

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^P},\quad P > 0,\quad f(x) = \frac{1}{x^P}\ x \in (0, \infty)$

$\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^P} = \lim\limits_{c \to \infty} \int\limits_1^{c} \frac{1}{x^P}\ dx = \lim\limits_{c \to \infty} \left[\frac{1}{-p+1} \cdot x^{-p+1}\right]_1^c = \lim\limits_{c \to \infty} \frac{1}{p-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{c^{P-1}}\right) = \begin{cases} 0 & P-1>0 \\ \infty & P-1=0 \\ \infty & P-1<0 \end{cases}$ Konvergent für $P > 1$ und divergent für $P \leq 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3 \cdot \sqrt{k}}{2 \cdot k^2 - 1} \qquad \frac{3 \cdot \sqrt{k}}{2 \cdot k^2 - 1} = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\frac{\sqrt{k}}{k^2}}_{\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}}}_{\text{Konvergent da } \frac{3}{2} > 1} \cdot \underbrace{\underbrace{\frac{3}{2 - \frac{1}{K^2}}}_{\to \frac{3}{2}}}_{\text{beschränkt}}}_{\text{Konvergent, Majoranten-Kriterium}}$$

$\mid \frac{3 \cdot \sqrt{k}}{2 \cdot k^2 - 1} \mid \leq \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} \cdot M$

Wurzelkriterium

Satz 6.2.4.: Es sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ gegeben, dann gilt $\rho = limsup\ \mid a_k \mid^{1/k} = \begin{cases} <1 & \text{absolut konvergent} \\ =1 & ? \\ >1 & \text{divergent} \end{cases}$

Beweis: $limsup\ \mid a_k \mid^{1/k} = lim\ t_n,\quad t_n = sup\{\mid a_k \mid^{1/k}: k > n\}$

$\rho > 1 \Rightarrow t_n > 1\ \ \forall\ n \Rightarrow \mid a_k \mid^{1/k} > 1 \Rightarrow a_k$ keine Nullfolge $\Rightarrow$ *divergent*

$\rho < 1 \Rightarrow$ Für $\rho < r < 1\ \exists N : t_n < r$ für $n > N \Rightarrow \mid a_k \mid^{1/k} < r\ \ k > N \Leftrightarrow \mid a_k \mid < \underbrace{r^k}_{\text{geometrische Reihe}}\ \ k > N \xRightarrow{\text{Majoranten-Kriterium}}$ Konvergenz $\blacksquare$

Beispiel: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k \cdot (\frac{9}{10})^k = k \cdot (\sqrt{\frac{9}{10}} \cdot \sqrt{\frac{9}{10}})^k = \underbrace{k \cdot (\sqrt{\frac{9}{10}})^k}_{\text{beschränkt}} \cdot (\frac{9}{10})^k \qquad (a_k)^{1/k} = \sqrt[k]{k}$[52] $\cdot \frac{9}{10} \Rightarrow \frac{9}{10} < 1 \Rightarrow$ konvergent

[51] Harmonische Reihe

[52] $\lim\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{k} = 1$

Quotientenkriterium

Satz 6.2.6.: Es sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ gegeben, dann gilt, dass falls $r = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$ exisitert, dass die Reihe konvergiert falls $r < 1$ und divergiert falls $r > 1$.

Beweis: $r > 1 \Rightarrow \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} > 1 \;\; \forall\, k > N \Rightarrow | a_k | = \frac{|a_k|}{|a_{k-1}|} \cdot \frac{|a_{k-1}|}{|a_{k-2}|} \cdots | \frac{a_{N+1}}{a_N} | \cdot | a_N | > | a_N | \Rightarrow a_k$ keine Nullfolge $\Rightarrow$ divergent

$r < 1 \Rightarrow r < t < 1, \;\; \exists\, N : | \frac{a_{k+1}}{a_k} | < t \;\; n \geq N \Rightarrow | a_k | = | \frac{a_k}{a_{k+1}} | \cdots | \frac{a_{N+1}}{a_N} | \cdot | a_N | <$

$\underbrace{t^{k-N}}_{\text{konv. geom. Reihe}} \cdot | a_N | \overset{\text{Majoranten}-\text{Kriterium}}{\Longrightarrow}$ konvergent ■

Beispiel:

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k} \quad a_k = \frac{k!}{k^k} \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{(k+1)!}{(k+1)^{(k+1)}}}{\frac{k!}{k^k}} = \frac{k^k \cdot (k+1)!}{(k!)\cdot(k+1)^{(k+1)}} = (k+1) \cdot \frac{k^k}{(k+1)^{(k+1)}} = (\frac{k}{k+1})^k = (\frac{1}{1+\frac{1}{k}})^k \to \frac{1}{e} < 1$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^5} + \ldots = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2\cdot k-1}} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2\cdot k}}$

$\frac{1}{2^{2\cdot k}} = \frac{1}{4^k}, \quad \frac{1}{3^{2\cdot k-1}} = \frac{3}{3^{2\cdot k}} = \frac{3}{9^k}$

6.3 Absolute und bedingte Konvergenz

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$

Absolut konvergent falls $\sum\limits_{k=1}^{\infty} | a_k |$ konvergiert

Bedingt konvergent falls konvergent aber nicht absolut konvergent

Satz 6.3.2. (Alternierende Reihe): Sei a_k fallend mit $a_k \to 0$, dann ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot a_k$ konvergent.

Beweis: $a_k - a_{k+1} \geq 0$

n ungerade: $s_{n+1} \leq s_{n+2} + a_{n+2} = s_n - (\underbrace{a_{n+1} - a_{n+2}}_{\geq 0}) \leq s_n$, also $s_{n+1} \leq s_{n+2} \leq s_n$

n gerade: $s_n \leq s_{n+2} \leq s_{n+1}$

$s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \ldots \leq s_{2\cdot n} \leq s_{2\cdot n+1} \leq \ldots \leq s_5 \leq s_3 \leq s_1$

$s_{2\cdot n} \to A, \quad s_{2\cdot n+1} \to B, \quad A \leq B$

$| s_{n+1} - s_n | = a_{n+1} \quad | A - B | \leq a_{n+1} \to 0 \Rightarrow A = B$ ■

Beispiel: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k^P} = \begin{cases} \text{absolut konvergent} & P>1 \\ \text{bedingt konvergent} & 0<P\leq 1 \end{cases}$

Gegeben: Bijektive Funktion $K : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ "Umordnung" von $\mathbb{N}$

$2, 1, 4, 3, 6, 5; \quad 1, 3, 2, 5, 7, 4, 9, 11, 6; \qquad \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k, \quad \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{K(j)}$

Satz 6.3.4.: Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ bedingt konvergent und $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, dann existiert eine Umordnung die gegen L konvergiert.

Beweis: (Bemerkung: Die Reihen der positiven bzw. negativen Glieder divergieren)

Gegeben $L \in \mathbb{R}$, konstruiere Umordnung $b_j = a_{K(j)}$

b_1 erste positive a_k falls $0 < L$ und erste nicht-positive a_k falls $L \leq 0$

Wähle $b_{n+1} : \begin{cases} \text{Falls } s_n<L \text{ nächstes positives } a_k \\ \text{Falls } s_n\geq L \text{ nächstes nicht}-\text{positives } a_k \end{cases}$

$\Rightarrow b_j$ ist eine Umordnung

Behauptung: $\sum\limits_{j=1}^{n} b_j \to L, \quad | \underbrace{\sum_{j=1}^{n} b_j}_{s_n} - L | < \epsilon \;\; \forall\, n > N$

$\exists\, M : | a_k | < \epsilon \;\; \forall\, k \geq M \Rightarrow \exists\, N$ so dass $a_1, \ldots, a_M$ in b_N gewählt wurden $\Rightarrow | \underbrace{\sum_{j=1}^{n} b_j}_{s_n} - L | < \epsilon$ gilt ■

Satz 6.3.5.: Jede Umordnung einer absolut konvergenten Reihe konvergiert gegen den gleichen Grenzwert.

Beweis: $s = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k, \quad t = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mid a_k \mid$

$\mid t_n - t \mid = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \mid a_k \mid$

$\Rightarrow \epsilon > 0 \;\; \exists\, N : \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \mid a_k \mid < \frac{\epsilon}{2} \;\; n > N, \qquad \mid s - s_n \mid < \frac{\epsilon}{2}$

Sei b_j eine Umordnung. Sei J das größte j für dass $K(j) \leq n \Rightarrow a_1, a_2, ..., a_n$ in $b_1, ..., b_j$ enthalten sind.

$$\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \mid s - \sum_{j=1}^{n} b_j \mid \leq \underbrace{\mid s - \sum_{k=1}^{n} a_k \mid}_{<\frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{\mid \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{k=1}^{n} a_k \mid}_{<\frac{\epsilon}{2}} < \epsilon \quad \blacksquare$$

Satz 6.3.6.: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ seien absolut konvergent. Dann ist $(\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k)(\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$.

Beweis: $(\sum\limits_{k=0}^{M} a_k) \cdot (\sum\limits_{j=0}^{N} b_j) = \sum\limits_{k=0}^{M} \sum\limits_{j=0}^{N} a_k \cdot b_j = \sum\limits_{n=0}^{M+N} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$

Umordnung von absolut konvergenten Folgen $\Rightarrow$ beide konvergieren gegen den gleichen Grenzwert. $\blacksquare$

6.4 Potenzreihen

Reihen von Funktionen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + ...$

Beispiel: $f_k(x) = a_k \cdot x^k$

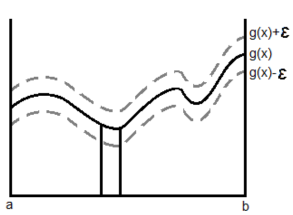
Konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + ...$ für jedes $x \in I$ so erhält man eine Funktion $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x) \quad x \in I$.

Definition 6.4.1.: Die Funktionenreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + ...$ konvergiert gleichmäßig, falls die Reihe der Partialsummen gleichmäßig konvergiert. $\forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists\, N \;\; \forall\, x \in I : \mid g(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x) \mid < \epsilon$ falls $n > N$

Satz 6.4.2.: Sei $f_k : I \to \mathbb{R}$ stetig. Konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + ...$ gleichmäßig auf I, dann ist die Grenzfunktion g ebenfalls stetig.

Beweis: $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ ist stetig auf $I \overset{\text{Satz 3.4.4.}}{\Longrightarrow} g$ stetig. $\blacksquare$

Satz 6.4.3.: Sei $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + ...$ konvergiere gleichmäßig auf $[a,b]$, dann $\int\limits_a^b g(x)\; dx = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_a^b f_k(x)\; dx$



$s_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x), \quad U(s_n, P) \leq U(g + \epsilon, P) = U(g, P) + \epsilon \cdot (b - a)$

Weierstraß'scher Majoranten Test

Satz 6.4.4.: Sei $f_k(x) : I \to \mathbb{R}$ und es gilt $\mid f_k(x) \mid \leq M_k$ mit $\sum\limits_{k=1}^{\infty} M_k$ konvergent. Dann konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + ...$ gleichmäßig auf I.

Beweis: $\mid g(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x) \mid = \mid \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \mid \leq \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \mid f_k(x) \mid \leq \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} M_k \quad \blacksquare$

Potenzreihen

Satz 6.4.6.: Gegeben sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \cdot (x-a)^k$ und es sei R[53] $= \frac{1}{limsup\ |c_k|^{1/k}}$. Falls $R > 0$, dann konvergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \cdot (x-a)^k$ für alle x mit $| x-a |< R$ absolut und divergiert für alle x mit $| x-a |> R$.

Beweis: Sei $r > 0$ und $R > 0$, dann gilt $limsup\ \ | c_k \cdot r^k |^{1/k} = \frac{r}{R}$. Setze $| x-a |= r > 0$. Aus dem Wurzelkriterium folgt, dass $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \cdot r^k$ konvergiert. Daraus folgt $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \cdot (x-a)^k$ konvergiert absolut. Analog Divergenz $\blacksquare$

Beispiel:

(a) $\overbrace{\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k}^{\frac{1}{1-x}}$ (b) $\overbrace{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}}^{-ln(1-x)}$ (c) $\overbrace{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}}^{g(x)}$

$c_k = 1$ $\quad c_k = \frac{1}{k}$ $\quad c_k = \frac{1}{k^2}$

$lim\ \sqrt[k]{1} = 1 \quad lim\ (\frac{1}{k})^{\frac{1}{k}} = 1 \quad lim\ \ \underbrace{(\frac{1}{k^2})^{\frac{1}{k}}}_{=((\frac{1}{k})\cdot\frac{1}{k})^2} = 1$

$(-1,1)$[54] $\quad [-1,1) \quad [-1,1]$

$g(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2},\quad g'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k} = \frac{1}{x}\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\frac{1}{x}\cdot ln(1-x)$

$g(x) = -\int\limits_0^x \frac{ln(1-t)}{t}\ dt$

Quotiententest: $\lim\limits_{k\to\infty} | \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{k!}{x^k} |= \lim\limits_{k\to\infty}\frac{|x|}{k+1} = 0 \Rightarrow R = \infty$

Satz 6.4.10: Es sei $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \cdot (x-a)^k \quad | x-a |< R$. Dann ist f stetig auf $(a-R,\ a+R)$ und es gilt $\int\limits_a^x f(t)\ dt = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1}\cdot (x-a)^{k+1} \quad | x-a |< R$. R ist auch der Konvergenzradius dieser Potenzreihe.

Beweis:

(i) Reihe ist gleichmäßig konvergent auf $[-R+\epsilon+a,\ a+R-\epsilon]$

$\Rightarrow f(x)$ stetig auf $[-R+\epsilon+a,\ a+R-\epsilon]$

$\Rightarrow f(x)$ stetig auf $(-R+a,\ a+R)$

(ii) $\int\limits_a^x f(t)\ dt = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1}\cdot(x-a)^{k+1} \quad | x-a |< R$ folgt aus Satz 6.4.3.

$\int\limits_a^x f(t)\ dt = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\int\limits_a^x c_k\cdot(t-a)^k\ dt = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\cdot\frac{(t-a)^{k+1}}{k+1} \quad | x-a |< R$

$$limsup\ \underbrace{\sqrt[k]{\frac{c_k}{k+1}}}_{\sqrt[k]{c_k}\cdot\underbrace{\sqrt[k]{\frac{1}{k+1}}}_{\to 1}} = limsup\ \sqrt[k]{c_k}\cdot lim\ \sqrt[k]{\frac{1}{k+1}} = limsup\ \sqrt[k]{c_k} = \frac{1}{R} \quad \blacksquare$$

Beispiel: $ln(1+x) \quad f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k,\quad f(x) = \frac{1}{1+x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-x)^k$

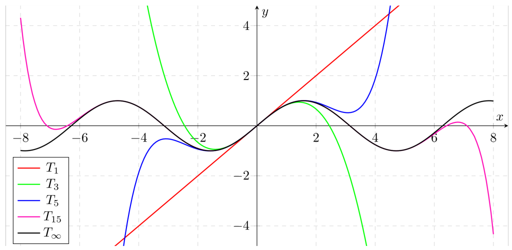
Satz 6.4.12.: Sei $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\cdot(x-a)^k \quad | x-a |< R$. Dann ist f differenzierbar auf $(a-R,\ a+R)$ und $f'(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k\cdot c_k\cdot(x-a)^{k-1} \quad | x-a |< R$

Beweis: $\underset{k\to\infty}{limsup}\sqrt[k]{k\cdot c_k} = \underset{k\to\infty}{limsup}\sqrt[k]{c_k}\cdot\underbrace{\lim\limits_{k\to 1}\sqrt[k]{k}}_{=1} = \frac{1}{R}$. Gleicher Konvergenzradius und nach Satz 6.4.10. ist das gliedweise Integral eine Stammfunktion. $\blacksquare$

[53] Konvergenzradius?

[54] Konvergenzintervall

6.5 Taylor'sche Formeln



$f(x) \approx f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2}\cdot(x-a)^2 + ...$

Satz 6.5.2.: Sei $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \cdot (x-a)^k$ eine konvergente Potenzreihe. Dann ist $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$.

Beweis: Behauptung: $f^{(n)}(x) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!}(x-a)^{k-n}$

$f'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \cdot k \cdot (x-a)^{k-1} \quad k = \frac{k!}{(k-1)!} \quad n=1 \ \checkmark$

$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = (\sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!}\cdot c_k \cdot (x-a)^{k-n})' = \sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!}\cdot c_k \cdot (k-n)\cdot(x-a)^{k-n-1} =$

$= \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \underbrace{\frac{k!}{(k-n)!}\cdot(k-n)}_{\frac{k!}{(k-(n+1))!}} \cdot c_k \cdot (x-a)^{k-(n+1)} \quad \checkmark$

$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{(n-n)!}$[55] $\cdot c_k \cdot (a-a)^0 + \cancel{\frac{(n+1)!}{(n+1-n)!}\cdot c_{n+1}\cdot(a-a)^1} + \cancel{...} + ... = n!\cdot c_n \quad \blacksquare$

Satz 6.5.3. (Formel von Taylor): Sei f : offenes Intervall $I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ und $f \in C^{(n+1)}(I)$. Dann gilt für $x \in I \quad f(x) = \underbrace{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\cdot(x-a)^k}_{=:T_n,\ \text{Taylorpolynom vom Grad n}} + \underbrace{R_n}_{\text{Restglied}}$ mit $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1}$ für ein c zwischen a und x.

Beweis: Setze $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$

$s(t) = f(x) - f(t) - f'(t)\cdot(x-t) - \frac{f''(t)}{2}\cdot(x-t)^2 - ... - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}\cdot(x-t)^n - R_n(x)\cdot\left(\frac{x-t}{x-a}\right)^{k+1}$

$\left.\begin{matrix} s(a) = f(x) - T_n(x) - R_n(x) = 0 \\ s(x) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists\, c$ zwischen x und a mit $s'(c) = 0$

$0 = s'(c) = 0 - \cancel{f'(c)} - \cancel{f''(c)\cdot(x-c)} + \cancel{f'(c)} - \cancel{\frac{f'''(c)}{2}\cdot(x-c)^2} + \cancel{\frac{f''(c)}{2}\cdot 2\cdot(x-c)} ... - \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\cdot(x-c)^n + R_n\cdot(n+1)\frac{(x-c)^n}{(x-a)^{n+1}}$

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\cdot(x-c)^n\cdot\frac{(x-a)^{n+1}}{(x-c)^n}\cdot\frac{1}{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1} \quad \blacksquare$

Beispiel: $f(x) = e^x, \quad f'(x) = e^x, ..., \quad f^{(n)} = e^x$

$f(0) = 1, ..., \quad f^{(n)}(0) = 1 \Rightarrow$ Taylorreihe $\tilde{f}(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad x \in \mathbb{R}$. Ist $\tilde{f}(x) = f(x)$?

$f(x) = T_n(x) = R_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + \frac{\overset{e^c}{\cancel{f^{(n+1)}(c)}}}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}$

Ist $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$?

$\mid R_n(x) \mid \leq \frac{1}{(n+1)!}\cdot e^{|x|}\cdot \mid x \mid^{n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \quad \forall\ x \Rightarrow f(x) = \tilde{f}(x)$

$\frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}\cdot\frac{(n-1)!}{|x|^{n-1}} = \frac{|x|}{n+2} \to 0$

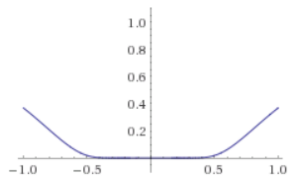
$$\boxed{e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}}$$

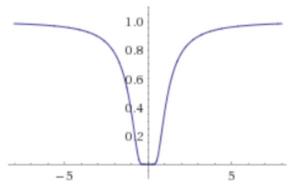
$f(x) = \begin{matrix} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{matrix}$

$f'(x) = \begin{matrix} e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{2}{x^3} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{matrix}$

$f(x)$ beliebig oft differenzierbar und $f^{(n)}(0) = 0$

[55] $0! = 1$





$f(x) = sin(x), \quad f'(x) = cos(x), \quad f''(x) = -sin(x), \quad f'''(x) = -cos(x), \quad f^{IV}(x) = sin(x)$

$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1, \qquad f''(0) = 0, \qquad f'''(0) = -1, \qquad f^{IV}(0) = 0$

$\boxed{sin(x) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2\cdot k+1)!} \cdot x^{2\cdot k+1}}$

$\mid R_n(x) \mid \leq \frac{|x|^{2\cdot n+3}}{(2\cdot n+3)!} \to 0$

$cos(x) := sin'(x), \quad (sin^2(x) + cos^2(x))' = ... = 0$

Satz 6.5.7. (Lagrange-Form des Restglieds): $R_n(x) = \frac{1}{n!} \cdot \int\limits_a^x (x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t)\ dt$

Beweis: $n = 0, \quad f(x) = f(a) + \int\limits_a^x f'(t)\ dt \quad \checkmark$

Induktionsbeweis: $f(x) = T_n(x) + (R_n(x) =) R_n(x) = \frac{1}{n!} \cdot \int\limits_a^x (x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t)\ dt \overset{\text{Part.Int.}}{=} T_n(x) - \frac{1}{n!} \cdot \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \cdot f^{(n+1)}(t) \mid_a^x$

$+ \frac{1}{n!} \cdot \int\limits_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \cdot f^{(n+2)}(t)\ dt = \underbrace{T_n(x) + \frac{1}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1} \cdot f^{(n+1)}(a)}_{T_{n+1}(x)} + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!} \cdot \int\limits_a^x (x-t)^{n+1} \cdot f^{(n+2)}(a)\ dt}_{R_{n+1}(x)}$

Beispiel: $sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + R_4(x), \quad \mid R_{2\cdot n+2}(x) \mid \leq \frac{|x|^{2\cdot n+3}}{(2\cdot n+3)!}$

$x = [-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}], \quad \mid R_n(x) \mid \leq \frac{(\frac{\pi}{4})^5}{5!} < 0.003$, gilt auch für $\mid x \mid < \frac{\pi}{4}$

Einschub: Die Komplexen Zahlen

Definition: Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C} = \{x + i \cdot y \mid x,\ y \in \mathbb{R}\}$

Rechenregeln:

$(x_1 + i \cdot y_1) + (x_2 + i \cdot y_2) = (x_1 + x_2) + i \cdot (y_1 + y_2)$

$(x_1 + i \cdot y_1) \cdot (x_2 + i \cdot y_2) = x_1 \cdot x_2 + i \cdot (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) - y_1 \cdot y_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i \cdot (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$

$\frac{1}{x+i\cdot y} = \frac{1}{x+i\cdot y} - \frac{x-i\cdot y}{x-i\cdot y} = \frac{x-i\cdot y}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \cdot \frac{y}{x^2+y^2}$

$z = x + i \cdot y,\ \bar{z} = x - i \cdot y \mid z_1 \cdot z_2 \mid = \mid z_1 \mid \cdot \mid z_2 \mid$

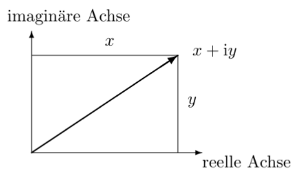
$\mid \frac{z_1}{z_2} \mid = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

$\mid z \mid = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

Satz: $\mathbb{C}$ ist ein Körper.

Achtung: $\mathbb{C}$ ist nicht geordnet! (Es gibt keine Ungleichungen)

Abstand in $\mathbb{C}$



Satz: Seien $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$

- $\mid z_1 + z_2 \mid \leq \mid z_1 \mid + \mid z_2 \mid$[56] Dreiecksungleichung
- $\mid\mid z_1 \mid - \mid z_2 \mid\mid \leq \mid z_1 - z_2 \mid$

Beweis: $\mid z_1 + z_2 \mid^2 = \mid z_1 \mid^2 + 2 \cdot Re(z_1 \cdot z_2)$[57] $+ \mid z_2 \mid^2 \leq \mid z_1 \mid^2 + 2 \cdot \mid z_1 \cdot z_2 \mid + \mid z_2 \mid^2 = (\mid z_1 \mid + \mid z_2 \mid)^2$ ■

Konvergenz

Folge komplexer Zahlen $\{a_n\}$

$\{a_n\}$ konvergiert gegen a falls: $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ N : \mid a_n - a \mid$[58] $< \epsilon \quad n > N$

Satz: $a_n \to a$ genau dann, wenn $\begin{cases} Re(a_n) \to R(a) \\ Im(a_n) \to Im(a) \end{cases}$ und

Beweis: $a_n \to a \Leftrightarrow \mid a_n - a \mid \to 0 \Rightarrow \mid Re(a_n - a) \mid \to 0$ und $\mid Im(a_n - a) \mid \to 0$

$\left.\begin{matrix} Re(a_n) \to Re(a) \\ Im(a_n) \to Im(a) \end{matrix}\right\} \sqrt{Re(a_n)^2 + Im(a_n)^2} \to \sqrt{Re(a)^2 + Im(a)^2}$ ■

Definition: a_n heißt beschränkt falls $\mid a_n \mid$ beschränkt ist.

Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen

Definition (Komplexe Exponentialfunktion): $\exp(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},\ z \in \mathbb{C}.$

Satz: Die Exponentialfunktion ist analytisch und es gilt $exp'(z) = exp(z)$.

Satz: $exp(z_1 + z_2) = exp(z_1) \cdot exp(z_2) \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

Beweis: $\exp(z_1) \cdot \exp(z_2) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z_2^k}{k!} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \sum\limits_{j=0}^{k} \frac{z_1^j \cdot z_2^{k-j}}{j! \cdot (k-j)!} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum\limits_{j=0}^{k} \binom{k}{j}$[59] $z_1^j \cdot z_2^{k-j} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^k}{k!} = \exp(z_1 + z_2)$ ■

---

[56] $\mid\quad\mid$ ist eine reelle Zahl

[57] $\mid Re(z) \mid \leq \mid z \mid,\ \ \mid Im(z) \mid \leq \mid z \mid,\ \ \mid x \mid$ bzw. $\mid y \mid \leq \sqrt{x^2 + y^2}$

[58] $\sqrt{(Re(a_n - a))^2 + (Im(a_n - a))^2}$

[59] $\frac{k!}{j! \cdot (k-j)!}$

Notiz: $exp(-z) = \frac{1}{exp(z)}$, $\overline{exp(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}} = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\frac{z^k}{k!}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^k}{k!} = exp(\bar{z})$, $\mid exp(i \cdot y) \mid^2 = exp(i \cdot y) \cdot exp(-i \cdot y) = exp(0) = 1$

Definition (Trigonometrische Funktionen):

$cos(z) = \frac{1}{2} \cdot (exp(i \cdot z) + exp(-i \cdot z)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2 \cdot k}}{(2 \cdot k)!}$

$sin(z) = \frac{1}{2 \cdot i} \cdot (exp(i \cdot z) - exp(-i \cdot z)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2 \cdot k+1}}{(2 \cdot k+1)!}$

Satz (Formel von Euler): $e^{i \cdot y} = cos(y) + i \cdot sin(y) \quad y \in \mathbb{R}, \; e^z = e^{x+i \cdot y} = e^x \cdot e^{i \cdot y} = e^x \cdot (cos(y) + i \cdot sin(y))$

Satz: Seien $z_1, \; z_2 \in \mathbb{C}$, dann gilt:

(1) $cos(-z) = cos(z)$ (gerade Funktion!)

$sin(-z) = -sin(z)$ (ungerade Funktion!)

(2) $sin^2(z) + cos^2(z) = 1 \quad (\mid sin(z) \mid \leq 1, \quad \mid cos(z) \mid \leq 1)$

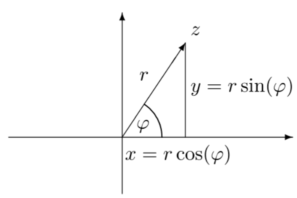
(3) Additionstheoreme:

$sin(z_1 \pm z_2) = sin(z_1) \cdot cos(z_2) \pm cos(z_1) \cdot sin(z_2)$

$cos(z_1 \pm z_2) = cos(z_1) \cdot cos(z_2) \mp sin(z_1) \cdot sin(z_2)$

(4) $sin'(z) = cos(z) \qquad cos'(z) = -sin(z)$

Polardarstellung



$z_j = r_j \cdot e^{i \cdot \varphi_j}$[60] $\qquad r = \mid z \mid = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \varphi = \begin{cases} arccos(\frac{x}{r}) & y \geq 0 \\ -arccos(\frac{x}{r}) & y < 0 \end{cases} \varphi \in (-\pi, +\pi]$

Satz (Formel von Moivre): $z^n = r^n \cdot e^{i \cdot n \cdot \varphi} = r^n \cdot (cos(n \cdot \varphi) + i \cdot sin(n \cdot \varphi))$

Definition: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \cdot \frac{\varphi}{n}} \qquad -\pi < \varphi \leq +\pi$ (Hauptzweig)

Definition: $log : \; \mathbb{C} \backslash \{0\} \to \mathbb{C} \qquad z = r \cdot e^{i \cdot \varphi} \mapsto log(z) = ln(z) + i \cdot \varphi \quad \varphi \in (-\pi, +\pi]$

Definition: $z^w = e^{w \cdot log(z)}$

[60] z.B.: $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i \cdot (\varphi_1 + \varphi_2)}$

7 Der euklidische Raum

Achtung! Ab hier bis Kapitel 7.2 habe ich den englischen Text übersetzt, d.h. es gibt sicher noch ein paar Übersetzungsfehler.

7.1 Euclidean Space

Definition: Der Raum $\mathbb{R}^d$ ist die Menge aller d-tupel (geordnet in der Form $(x_1, x_2, ..., x_d)$).

Bemerkung: Die Reihenfolge ist wichtig! Das heißt, dass $(x_1, x_2) \neq (x_2, x_1)$ falls $x_1 \neq x_2$.

Bemerkung: $\mathbb{R}^2$ ist eine Ebene. Graphen von Funktionen von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ werden auf solchen Ebenen konstruiert. $GR(f) = \{(x, f(x)) : x \in D(f)\}$, wobei $(f(x), x)$ dabei eher wenig Sinn macht. Für die Rechenoperationen Addition und Multiplikation im $\mathbb{R}^d$ gilt folgendes: Seien $x = (x_1, x_2, ..., x_d)$ und $y = (y_1, y_2, ...y_d)$ Vektoren aus dem $\mathbb{R}^d$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Skalar, dann ist $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_d + y_d)$ und $\alpha \cdot x = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, ..., \alpha \cdot x_d)$.

Satz 7.1.1.: Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^d$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dann gilt:

1. $u + (v + w) = (u + v) + w$
2. $u + v = v + u$
3. $0 + u = u$
4. $0 \cdot u = 0$
5. $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha \cdot \beta) \cdot u$
6. $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$
7. $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$

Definition: Eine Menge mit den Rechenoperationen Addition und skalarer Multiplikation (wo die Skalare zu einem Körper F gehören), wo die oben genannten Eigenschaften eingehalten werden, heißt Vektorraum über einen Körper F. Das heißt, $\mathbb{R}^d$ ist ein Vektorraum über den Körper $\mathbb{R}$.

Um den Abstandsbegriff im $\mathbb{R}^d$ zu definieren, wird das innere Produkt (Skalarprodukt) verwendet. Das innere Produkt ist $\langle u, v\rangle = \sum\limits_{k=1}^{d} u_k \cdot v_k$. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist eine Abbildung vom $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.

Satz 7.1.4.:: Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^d$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, dann gilt:

1. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$
2. $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$
3. $\langle \alpha \cdot u, v\rangle = \alpha \cdot \langle u, v\rangle$
4. $\langle u, u\rangle \geq 0$ und $\langle 0, 0\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Definition: Eine Funktion, die Vektorpäarchen (in $\mathbb{R}^d$) in den $\mathbb{R}$ (Skalare) abbildet und die Eigenschaften aus Satz 7.1.4. respektiert, heißt inneres Produkt. Dieser Raum wird dann auch Skalarproduktraum genannt. Das innere Produkt $\langle u, v\rangle = \sum\limits_{k=1}^{d} u_k \cdot v_k$ heißt auch euklidisches inneres Produkt.

Notation: $e_k = (0, 0, ..., 0, \underbrace{1}_{k}, ..., 0)$, $\langle e_k, e_j\rangle = \delta_{kj}$. Das heißt, dass $\{e_k\}^d$ orthonormal im euklidischen Raum $\mathbb{R}^d$ ist. $\langle e_k, x\rangle = x_k$ wo $x = (x_1, x_2, ..., x_d)$ ist, also $x = \sum\limits_{k=1}^{d} \langle e_k, x\rangle \cdot e_k$.

Definition 7.1.7.: Im Skalarproduktraum $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ wird die Norm, $||\cdot||$, von einem Element $x \in X$ als $|| x ||= \sqrt{\langle x,x\rangle}$ definiert. Der Abstand zwischen x und y ist definiert als $|| x-y ||$.

Satz 7.1.8. (Cauchy-Schwarz Ungleichung): Falls $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Skalarproduktraum ist, dann $| \langle x,y\rangle | \leq || x || \cdot || y ||$.

Beweis: Seien $x, y \in X$ und $t \in \mathbb{R}$. Dann $f(t) := \langle t\cdot x+y, t\cdot x+y\rangle = t^2 \cdot || x ||^2 + 2\cdot t\cdot\langle x,y\rangle + || y ||^2 \geq 0$. f ist eine Parabel mit maximal einer Wurzel genau dann, wenn $\langle x,y\rangle^2 - (|| x || \cdot || y ||)^2 \leq 0$ ■

Bemerkung: Aus Satz 7.1.8. folgt die Definition für Winkel: $\theta(x,y) = arccos(\frac{\langle x,y\rangle}{||x||\cdot||y||})$.

Im $\mathbb{R}^2$ ist $\langle x,y\rangle = || x || \cdot || y || \cdot cos(\theta)$, da $| cos(\theta) \leq 1 \Rightarrow | \langle x,y\rangle | \leq || x || \cdot || y ||$.

Anmerkung: $| \theta | = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \langle x,y\rangle = 0$

Satz 7.1.10.: Sei $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Skalarproduktraum, $x \in X$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, dann gilt:

1. $|| x+y || \leq || x || + || y ||$
2. $|| \alpha \cdot x || = | \alpha | \cdot || x ||$
3. $|| x || = 0 \Rightarrow x = 0$

Beweis: $|| x+y ||^2 = \langle x+y,\ x+y\rangle = || x ||^2 + 2\cdot\langle x,y\rangle + || y ||^2 \leq || x ||^2 + 2 \cdot || x || \cdot || y || + || y ||^2 = (|| x || + || y ||)^2$ ■

Definition: Eine Norm im Vektorraum X ist eine Funktion $|| \cdot || \cdot X \to \mathbb{R}$, dessen Menge $\theta(x,y) = arccos(\frac{\langle x,y\rangle}{||x||\cdot||y||})$ und Eigenschaften aus Satz 7.1.10. 2.+3. als Norm bezeichnet wird. Ein Vektorraum X, die eine Norm $|| \cdot ||$ enthält wird Normierter Raum genannt.

$I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $C(I) = \{f : I \to \mathbb{R} \mid f$ stetig auf $I\}$. $|| f ||_\infty = \underset{x\in I}{sup} \mid f(x) \mid$, $|| f ||_p = (\int\limits_I \mid f(x) \mid^p \ dx)^{\frac{1}{p}}$[61], $|| f+g ||_p \leq || f ||_p + || g ||_p$, $|| \alpha \cdot f ||_p = | \alpha | \cdot || f ||_p$

$\underbrace{\underset{x\in I}{sup} \mid f(x)+g(x)}_{||f+g||_\infty} \leq \underset{x\in I}{sup}(\mid f(x) \mid + \mid g(x) \mid) \leq \underbrace{\underset{x\in I}{sup} \mid f(x) \mid}_{||f||_\infty} + \underbrace{\underset{x\in I}{sup} \mid g(x) \mid}_{||g||_\infty}$

7.2 Konvergenz

Metrischer Raum: Eine Menge X mit einer Funktion $\delta : X \times X \to [0,\infty)$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\delta(x,y) = \delta(y,x)$

(ii) $\delta(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

(iii) $\delta(x,z) \leq \delta(x,y) + \delta(y,z)$

Satz 7.2.2.: Jeder normierte Raum mit $\delta(x,y) = || x-y ||$ ist ein metrischer Raum.

Beweis:

(i) $\delta(x,y) = || x-y || = || y-x || = \delta(y,x)$

(ii) $\delta(x,y) = || x-y || = 0 \Rightarrow x-y = 0 \Rightarrow x = y$

(iii) $\delta(x,z) = || x-z || = || x-y+y-z || \leq || x-y || + || y-z || = \delta(x,y) + \delta(y,z)$ ■

"Metrischer Raum < Normierter Raum < Raum mit Skalarprodukt", soll heißen: Wenn ein Raum das Skalarprodukt enthält, dann ist es automatisch auch ein normierter Raum usw.

Folgen und Konvergenz

Definition 7.2.5.: Sei $\{x_n\}$ eine Folge von Vektoren aus $\mathbb{R}^d$ und $x \in \mathbb{R}^d$. Dann konvergiert $x_n \to x$ falls $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ N :$ $\underbrace{|| x-x_n ||}_{\delta(x,x_n)} < \epsilon \quad n > N$

---

[61] $p \geq 1$

Satz 7.2.8.: Sei $\{x_n\} \in \mathbb{R}^d$ eine Folge und $x \in \mathbb{R}^d$ ein Vektor. Dann gilt für $\{a_n\}$: $\| x - x_n \| \leq a_n \quad \forall\ n$. Falls $a_n \to 0$, dann auch $x_n \to 0$.

Beispiel: $x_n = (e^{-n} \cdot sin(n), e^{-n}) \in \mathbb{R}^2$, Vermutung: $x_n \to 0$

$\| x_n - 0 \| = \sqrt{(e^{-n} \cdot sin(n))^2 + (e^{-n})^2} = \sqrt{e^{-2 \cdot n} \cdot sin^2(n) + e^{-2 \cdot n}} = e^{-n} \cdot \sqrt{1 + sin^2(n)} \leq \sqrt{2} \cdot e^{-n} \to 0$

Satz: 7.2.10.: Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig.

Satz 7.2.11.: Sei $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^d,\ x \in \mathbb{R}^d$ und $x_n \to x$. Dann $\| x_n \| \to \| x \|$.

Beweis: $| \quad \| x \| - \| x_n \| \quad | \leq \| x - x_n \| \to 0 \quad \blacksquare$

Satz 7.2.12.: Seien $x_n \to x,\ y_n \to y \ \in \mathbb{R}^d$ und $a_n \to a \ \in \mathbb{R}$, dann gilt:

(a) $x_n + y_n \to x + y$

(b) $a_n \cdot x_n \to a \cdot x$

(c) $x_n \cdot y_n \to x \cdot y$ (Skalarprodukt!)

Beweis: (a) $\| x_n + y_n - (x + y) \| \leq \underbrace{\| x_n - x \|}_{\to 0} + \underbrace{\| y_n - y \|}_{\to 0} \to 0$

(b) $\| a \cdot x - a_n \cdot x_n \| = \| a \cdot x - a \cdot x_n + a \cdot x_n - a_n \cdot x_n \| = \| a \cdot (x - x_n) + x_n \cdot (a - a_n) \| \leq \| xn \cdot (a - a_n) \| + \| a \cdot (x - x_n) \| = \| x_n \| \cdot \underbrace{| a - a_n |}_{\to 0} \cdot + | a | \cdot \underbrace{\| x - x_n \|}_{\to 0}$

Satz 7.2.13.: Sei ${x_n}^{62} \to x^{63} \Leftrightarrow e_j \cdot x_n \to e_j \cdot x \quad j = 1, ..., d$

Beweis: $\Rightarrow$ folgt aus Satz 7.2.12 (c)

$\Leftarrow \| x_n - x \| = (\sum_{j=1}^{d} ({x_{n,j}}^{64} - {x_j}^{65})^2)^{1/2} \to 0 \quad \blacksquare$

Satz 7.2.14. (Bolzano-Weierstraß für $\mathbb{R}^d$): Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge.

Bemerkung: $\{x_n\}$ beschränkt $:\Leftrightarrow \exists\ M : \| x_n \| \leq M$

Beweis: $x_{n,j} \quad j = 1, ..., d$ beschränkte Folge reeller Zahlen

$\overset{\text{Bolzano-Weierstraß}}{\underset{\text{für } \mathbb{R}^d}{\Longrightarrow}} \exists$ Teilfolge, so dass $x_{n_{K_1},\ 1} \to x_1$

$\Longrightarrow \exists$ Teilfolge, so dass $x_{n_{{K_1}_{K_2}},\ 2} \to x_2 \quad \blacksquare$

Definition 7.2.15. (Cauchy-Folge): Eine Folge $\{x_n\}$ in $\mathbb{R}^d$ heißt Cauchy-Folge, falls $\forall\ \epsilon\ \exists\ N : \| x_n - x_m \| < \epsilon \ \ n, m > N$. Ein normierter Raum heißt vollständig, falls jede Cauchy-Folge konvergiert.

Satz: $\mathbb{R}^d$ (und $\mathbb{C}^d$) ist vollständig.

7.3 Offene und abgeschlossene Mengen (Topologie)

Definition: $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \ \| x - x_0 \| < r\}$ offene Kugel (um x_0 mit Radius r)

$\overline{B_r(x_0)} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \ \| x - x_0 \| \leq r\}$ abgeschlossene Kugel (um x_0 mit Radius r)

Definition 7.3.1.: Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt offen, falls es zu jedem $x \in U$ eine offene Kugel $B_r(x_0)$ $r > 0$ mit $B_r(x) \subseteq U$ gibt. Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt abgeschlossen, falls ihr Komplement $\mathbb{R}^d \backslash U$ offen ist. Eine Umgebung von $x \in \mathbb{R}^d$ ist eine Menge die eine offene Kugel um x enthält.

Satz 7.3.2.:

(a) ϕ ist offen und abgeschlossen

(b) $\mathbb{R}^d$ ist offen und abgeschlossen

(c) Jede offene Kugel ist offen

---

[63] $x_n = (x_{1,j}, ..., x_{d,j})$

[63] $x = (x_1, ..., x_d)$

[65] $x_{n,j} = e_j \cdot x_n$

[65] $x_j = e_j \cdot x$

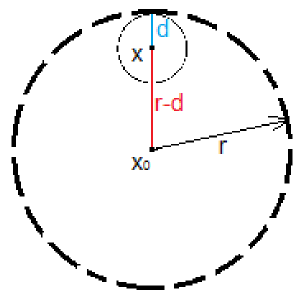
(d) Jede abgeschlossene Kugel ist abgeschlossen

Beweis:

(a) ✓

(b) ✓

(c) $B_r(x_0)$

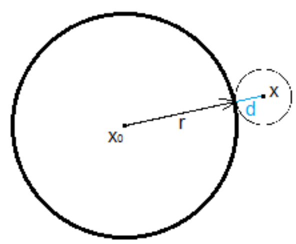


Wähle $x \in B_r(x_0) \Rightarrow d = r- \parallel x - x_0 \parallel > 0$

Behauptung: $B_d(x) \subseteq B_r(x_0),\ y \in B_d(x) \Rightarrow y \in B_r(x_0)$

$\parallel y - x_0 \parallel = \parallel y - x + x - x_0 \parallel \leq \underbrace{\parallel y - x \parallel}_{<d} + \underbrace{\parallel x - x_0 \parallel}_{=r-d} < \cancel{d} + r \cancel{-d} = r$

(d) $\overline{B_r(x_0)}$ abgeschlossen $\Leftrightarrow \mathbb{R}^d \backslash \overline{B_r(x_0)} = \{x \mid \ \parallel x - x_0 \parallel > r\}$ ist offen ■



Satz 7.3.3.:

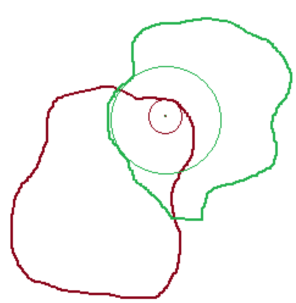
(a) Die Vereinigung offener Mengen ist offen

(b) Der Durchschnitt endlichvieler offener Mengen ist offen

(c) Der Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen

(d) Die Vereinigung endlichvieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen

Beweis: $(a) \Rightarrow (c)$ und $(b) \Rightarrow (d)$ folgt aus de Morgan-Regeln



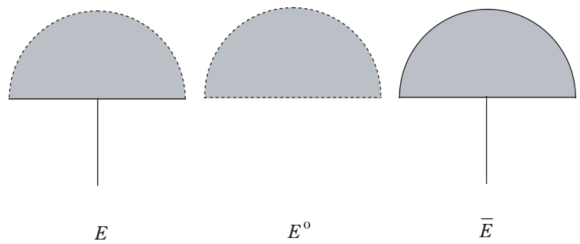
Definition 7.3.6.: Sei $E \subseteq \mathbb{R}^d$, dann gilt:

(a) Das Innere von E ist die größte offene Teilmenge von E. Schreibweise E°.

(b) Der Abschluss von E ist die kleinste abgeschlossene Menge die E enthält. Schreibweise $\overline{E}$.

(c) Der Rand von E ist $\overline{E}\backslash E^\circ$ (Differenz von E° und $\overline{E}$). Schreibweise ∂E.

Beispiel:



$E = \{(x,y) \mid \;\; || (x,y) || < 1,\; y \geq 0\} \cup \{(0,-y) \mid y \in [0,1]\}$

$E^\circ = \{(x,y) \mid \;\; || (x,y) || < 1,\; y > 0\}$

$\overline{E} = \{(x,y) \mid \;\; || (x,y) || = 1,\; y \geq 0\} \cup \{(x,0) \mid x \in [-1,+1]\} \cup \{(0,-y) \mid y \in [0,1]\}$

Beispiel:

Sei $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^1$, dann ist:

$\mathbb{Q}^\circ = \phi \qquad \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \qquad \partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$

Satz 7.3.7.: Seien $E \subseteq \mathbb{R}^d$ und $x \in \mathbb{R}^d$, dann gilt:

(a) $x \in E^\circ \Leftrightarrow$ Es existiert eine Umgebung von x die in E enthalten ist (Topografische Definition)

$\Leftrightarrow$ Es existiert ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subseteq E$ (Metrische Definition)

(b) $x \in \overline{E} \Leftrightarrow$ Jede Umgebung von x enthält einen Punkt aus E

$\Leftrightarrow\;\; \forall\, \epsilon > 0$ enthält $B_\epsilon(x)$ einen Punkt aus E

(c) $x \in \partial E \Leftrightarrow$ Jede Umgebung von x enthält Punkte aus E und dem Komplement von E

$\Leftrightarrow\;\; \forall\, \epsilon > 0$ enthält $B_\epsilon(x)$ Punkte aus E und dem Komplement von E

Satz 7.3.9.: Sei $x_n \in \mathbb{R}^d$, dann $x_n \to x \Leftrightarrow$ für jede Umgebung U von x existiert ein Index N, so dass $x_n \in U$ für $n \geq N$ (Umformulierung der Konvergenz).

Satz 7.3.10.: Sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Dann ist $\overline{A}$ die Menge aller Grenzwerte von konvergenten Folgen mit Gliedern aus A. Die Menge A ist abgeschlossen, wenn für jede konvergente Folge aus A auch der Grenzwert aus A ist.

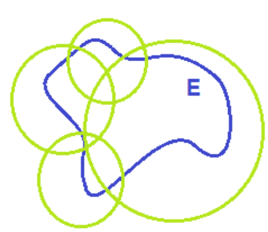
Beweis: $x \in \overline{A}$, wähle $B_{\frac{1}{2}}(x) \overset{\text{Satz } \underline{7.3.7.(b)}}{\Longrightarrow} \exists\, x_n \in A \cap B_{\frac{1}{2}}(x) \Rightarrow x_n \to x$

$x_n \in A,\; x_n \to x \Rightarrow \forall\, \epsilon > 0\; \exists\, N : x_n \in B_\epsilon(x) \overset{\text{Satz } \underline{7.3.7.(b)}}{\Longrightarrow} x \in A \quad \blacksquare$

7.4 Kompaktheit

Definition: Offene Überdeckung von $E \subseteq \mathbb{R}^d$ ist eine Familie von offenen Mengen deren Vereinigung E enthält.

Beispiel: $\mathscr{U} = \{$aller offenen Intervalle der maximalen Länge $\frac{1}{2}$ mit rationalen Randpunkten$\}$



(i) $\mathscr{U}$ überdeckt $\mathbb{R}$

(ii) $\mathscr{U}$ überdeckt $[0,1] \qquad (-\frac{1}{4}, +\frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{5}, \frac{3}{5}) \cup ...$

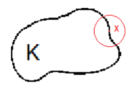
Beispiel: $\mathscr{U} = \{(\frac{1}{n}, 1) \mid n \in \mathbb{N}\}$ überdeckt $(0,1)$

Definition 7.4.3.: Eine Menge $E \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt kompakt, falls aus jeder offenen Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung ausgewählt werden kann.

Satz 7.4.4.: Jede kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^d$ ist beschränkt.

Beweis: $\mathbb{R}^d = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n(0) \supseteq K$. Da K kompakt $\rightarrow \bigcup_{n=1}^{N} B_n(0) \supseteq K \Rightarrow B_N(0) \supseteq K$ ■

Satz 7.4.5.: Jede kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^d$ ist abgeschlossen.



Beweis: Wir zeigen $K = \overline{K}$. Seien $x \in \overline{K}$ und O_n[66] $:= \mathbb{R}^d \backslash B_{\frac{1}{n}}(x)$. $O_n \cap K \neq \phi$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n = \mathbb{R}^d \backslash \{x\}$. Angenommen $x \in K \backslash \overline{K} \Rightarrow O_n$ Überdeckung von $K \underset{\text{kompakt}}{\overset{\text{da } K}{\Longrightarrow}} O_n \supseteq K$ für ein $N \in \mathbb{N}$, im Widerspruch zu $O_n \cap K \neq \phi \Rightarrow x \in K$ ■

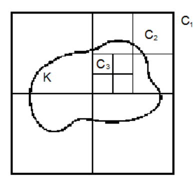
Satz 7.4.6.: $A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_n \supset A_{n+1} \supset ...$ ist eine Folge verschachtelter Mengen die alle nichtleer, beschränkt und abgeschlossen sind. Dann ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \phi$.

Beispiel: $\bigcap_n (0, \frac{1}{n}) = \phi$, $\bigcap_n (n, \infty) = \phi$

Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $x_n \in A_n \Rightarrow x_n \in A_1 \Rightarrow \{x_n\}$ beschränkt $\underset{\text{Weierstraß}}{\overset{\text{Bolzano}}{\Longrightarrow}}$ es existiert eine konvergente Teilfolge $x_{n_k} \rightarrow x$. Da $x_{n_k} \in A_1 = \overline{A_1} \Rightarrow x \in A_1$. Da $x_{n_k} \in A_2 = \overline{A_2}$ für $k \geq 2 \Rightarrow x \in A_2 ... x_{n_k} \in A_n \Rightarrow x \in A_n \Rightarrow x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ■

Satz 7.4.7. (Heine-Borel): Eine Menge $K \subseteq \mathbb{R}^d$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

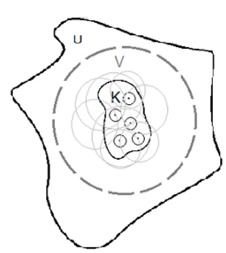
Beweis: $C_1 \supset C_2 \supset C_3$



$(C_1 \cap K) \supset (C_2 \cap K) \supset (C_3 \cap K) ... \overset{\text{Satz 7.4.6.}}{\Longrightarrow} \exists\, x \in \bigcap_{j\in\mathbb{N}} C_j \cap K \Rightarrow$ es existiert eine offene Menge O aus unserer Überdeckung mit $x \in O \Rightarrow$ diese eine Menge überdeckt C_j für j klein genug $\lightning$ ■

Korollar 7.4.8.: Jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Teilmenge ist kompakt.

Satz 7.4.10.: K sei kompakt, U offen in $\mathbb{R}^d$ und $K \subset U$. Dann existiert eine offene Menge V mit $\overline{V}$ kompakt und $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$.



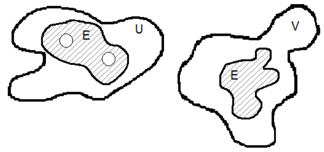
7.5 Zusammenhang

Definition 7.5.1.: Eine Menge $E \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt nicht zusammenhängend (getrennt), falls zwei <u>offene</u> Mengen U, V existieren mit:

(a) $E \subseteq U \cup V$

(b) $(E \cap V) \cap (E \cap U) = \phi$

[66] Offene Menge

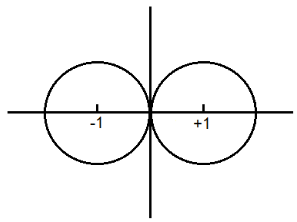


(c) $(E \cap V) \neq \phi$ und $(E \cap U) \neq \phi$

Beispiel: $E = (-1, 0) \cup (0, 1),\ U = (-1, 0),\ V = (0, 1)$

$E = (-1, 0] \cup (0, 1)$ zusammenhängend

$E = B_1((-1, 0)) \cup B_1((+1, 0))$ nicht zusammenhängend



$E = \overline{B_1((-1, 0))} \cup B_1((+1, 0))$ bzw. $E = B_1((-1, 0)) \cup B_1((+1, 0)) \cup \{(0, 0)\}$ zusammenhängend

Definition 7.5.2.: Eine Teilmenge $A \subset E$ (und $E \subseteq \mathbb{R}^d$) heißt offen bezüglich E, falls $A = E \cap U$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen.

Beispiel: Angenommen $E = [0, 1]$, dann ist $A = [0, \frac{1}{2})$ offen bezüglich E, z.B. $A = (-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}) \cap E$

Satz 7.5.4.: Eine Menge $E \subseteq \mathbb{R}^d$ ist genau dann zusammenhängend, wenn E ein Intervall ist.

Beweis: Sei E zusammenhängend und nichtleer, $a = inf\ E,\ b = sup\ E,\ a \leq b$

E besteht aus einem Punkt $\Leftrightarrow a = b$ (trivialer Fall, wir betrachten im Folgenden $a < b$)

$E \subseteq \overline{(a, b)}$ (E Intervall $\Leftrightarrow (a, b) \subset E$)

Angenommen E sei kein Intervall $\Rightarrow (a, b) \not\subset E \Rightarrow\ \exists\ x \in (a, b)$ und $x \notin E$

$U = (-\infty, x),\ V = (x, +\infty)$

$$\left.\begin{array}{c} E \subset U \cup V \\ (U \cap E) \cap (V \cap E) = \phi \\ (U \cap E) \neq \phi,\ (V \cap E) \neq \phi \end{array}\right\} \Rightarrow E \text{ nicht zusammenhängend } \lightning$$

Sei E ein Intervall, $f : E \to \mathbb{R}$.

$x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in U \\ 0 & x \in V \end{cases}$

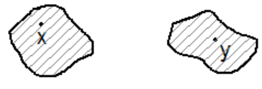
Angenommen E kann mit U, V zerlegt werden. Behauptung: f ist stetig. Sei $x \in E$ und $\epsilon > 0$ gegeben.

$\mid f(x) - f(y) \mid < \epsilon$ für alle $y \in B_\delta(x) \cap E \Rightarrow \mid f(x) - f(y) \mid = 0$

Nach dem Zwischenwertsatz müsste $f(x) = \frac{1}{2}$ für ein $x \in E$ $\lightning$

Satz 7.5.5.: Seien $A, B \subset \mathbb{R}^d$ zusammenhängend und $A \cap B \neq \phi$, dann ist auch $A \cup B$ zusammenhängend.

Definition 7.5.6.: Sei $E \subseteq \mathbb{R}^d,\ x \in E$ die größte zusammenhängende Teilmenge von E die x enthält, dann heißt sie Zusammenhangskomponente von x.



Satz 7.5.7.: $B_r(x)$ bzw. $\overline{B_r(x)}$ ist zusammenhängend.